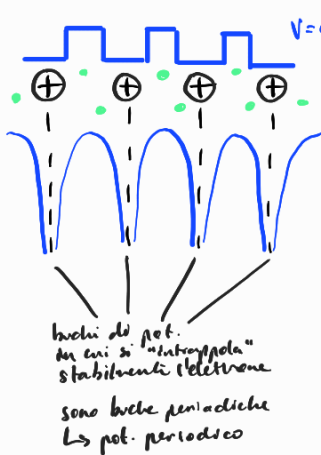


- 1) stato
 - 2) statistica di popolaz.
 - 3) trasporto
- } delle particelle

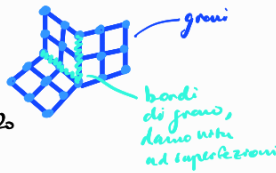
• operiamo su un solido (un reticolo in questo particolare caso)



- questi elettroni vedono gli ioni come dei buchi di potenziale (interagiscono tramite una forza Coulombiana, $\propto 1/r$)
- gli elettroni si muovono e interagiscono con queste buche
- gli ioni positivi sono per noi questi buchi il loro potenziale periodico. Tutto invece gli elettroni come un potenziale spalmato uniformemente negativo quindi sommato a quello periodico dei \oplus . Nel complesso dunque rimane comunque un pot. periodico

reticoli cristallini

- solidi**
- => **cristallini**: struttura ordinata regolare periodica
 - => **amorfi**: disordinati, non periodici (es. in maggior parte dei vetri. La diff con i liquidi è l'altissima viscosità)
 - => **policristallini**: aggregato di tanti piccoli cristallini



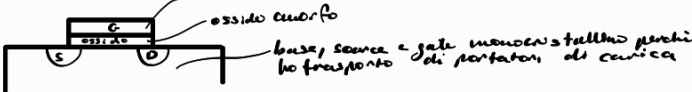
• i vetri di silicio sono monocristallini. SiO₂ invece è amorfo
 ce avessi bordi di grano, avrei problemi (es. ci si mettono i disordini, o creano un path preferito dagli elettroni)

• policristallini possono andar bene quando non ho trasporto

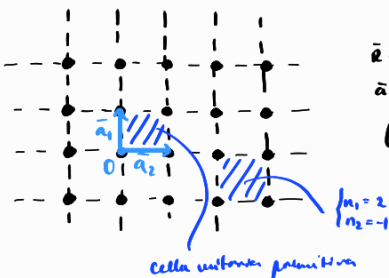
• HPO₂ sta sostituendo SiO₂ perché $E_g \approx 2.0$ (più alta del SiO₂) che mi permette di rendere lo strato di ossido più sottile

$C = \frac{\epsilon A}{d}$
 thickness \rightarrow cambio mat. per aumentare C
 non posso fare l'ossido più spesso per ridurre il leakage perché scendo drasticamente la capacitività

gate policristallino perché costa poco e non mi interessa il trasporto

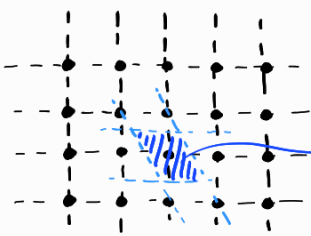


reticolo di Bravais



$\vec{r} = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 + n_3 \vec{a}_3$ posit. di un generico nodo $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$
 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$: vettori primitivi
 (essendo in 2D ho solo \vec{a}_1 e \vec{a}_2 in questo caso)

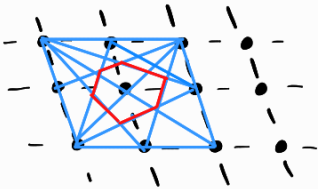
cella unitaria primitiva: se le repliche di vettore del reticolo di Bravais coprono perfettamente tutto il reticolo senza sovrapp.



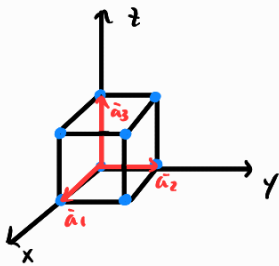
altra possibile cella unitaria primitiva

cella di Wigner-Seitz

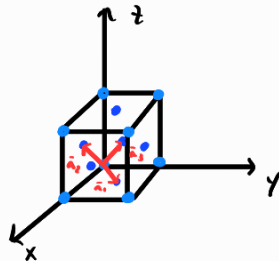
=> il nodo più vicino ai punti atomici della cella di Wigner-Seitz è sempre il nodo di riferimento



celle cubiche

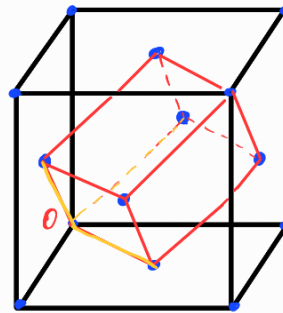


cubico semplice

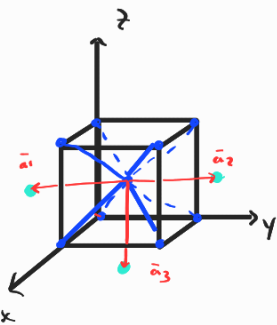


FCC - face centered cubic

- forma la cella primitiva partendo dai centri faccia più vicini
- non è primitiva (ma è unitaria)
↳ se mi sposto di uno lungo uno dei vettori ho una sovrapposiz.



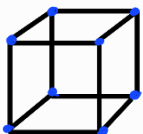
- cella primitiva di una cella FCC
- devo collegare l'origine ai 3 centri faccia più vicini



BCC - body centered cubic

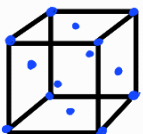
- per formare una cella primitiva punti compreso il centro di un cubo con i centri degli adiacenti

n° di atomi per cella



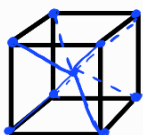
$$8 \text{ atomi} \cdot \frac{1}{8} = 1$$

↳ 1 atomo è diviso tra 8 celle



$$8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \text{il volume è 4 volte la cella primitiva (una cella primitiva ha sempre n° di atomi = 1)}$$

↳ gli atomi nei centri delle facce sono condivisi con le celle adiacenti

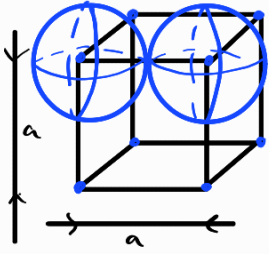


$$8 \cdot \frac{1}{8} + 1 = 2 \text{ anche questa non è primitiva}$$

packing Factor

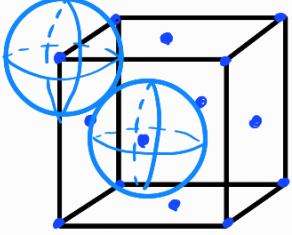
$$PF = \frac{V_{atoms}}{V_{cell}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^3 \cdot 1}{a^3} \approx \frac{\pi}{6} \sim 0,52$$

\leftarrow n° di atomi nella cella
 cioè il 52% della cella è occupata da atomi, il resto è vuoto

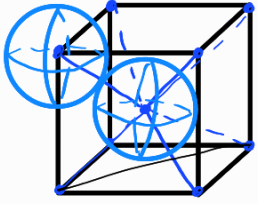


$$PF = \frac{V_{atoms}}{V_{cell}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^3 \cdot 4}{a^3} \sim 0,74$$

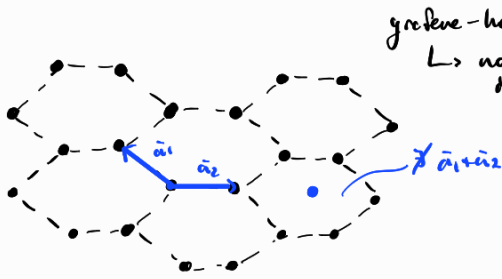
è il max PF nei solidi



$$PF = \frac{V_{atoms}}{V_{cell}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^3 \cdot 2}{a^3} \sim 0,68$$



7 sistemi (c.s. cubico)
 14 reticoli tot. (riconducibili a sistemi)

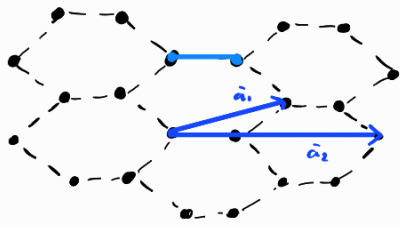


graphite-honeycomb structure
 ↳ non è un reticolo di Bravais! Non riesco ad individuare dei vettori primitivi \vec{a}_1 e \vec{a}_2 individuano tutti i nodi, ma anche individuano anche nodi che non esistono!

struttura = reticolo + base } coppia di atomi

2 vett. prim. mi descrivono un reticolo di Bravais

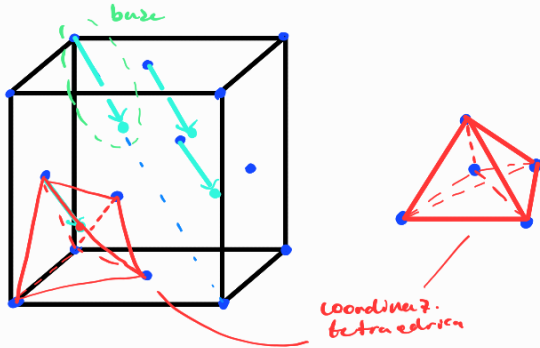
↳ nei nodi descritti dal reticolo di Bravais ci metto la base (in questo caso la coppia di atomi invece che un atomo) → riesco a descrivere tutta la struttura



struttura di diamante

↳ non è un reticolo di Bravais

sono gli usci 4 atomi che rimangono invariati alla FCC originale dopo la traslazione.



coordinazione tetraedrica

• ottengo la struttura duplicando e traslando la cella FCC di $\frac{1}{4}a$ lungo la diag., ottengo 2 FCC

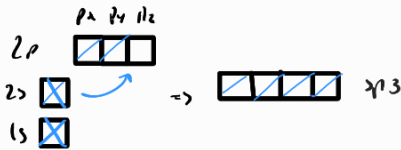
• struttura = reticolo + base
 vettori primitivi: quelli della FCC

• n° atomi = $8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 8$

↑
 atomi traslati che sono rimasti invariati alla FCC

109,47°
 • ibridizzazione sp^3
 • tra ciascun carbonio vicino c'è un legame covalente

• $PF = \frac{V_{atomo}}{V_{cella}} = \frac{4 \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{8} a\right)^3}{a^3} \sim 0,34$ metà del BCC!

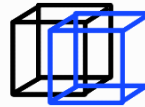


III	IV	V
B	C	N
Al	Si	P
Ga	Ge	As

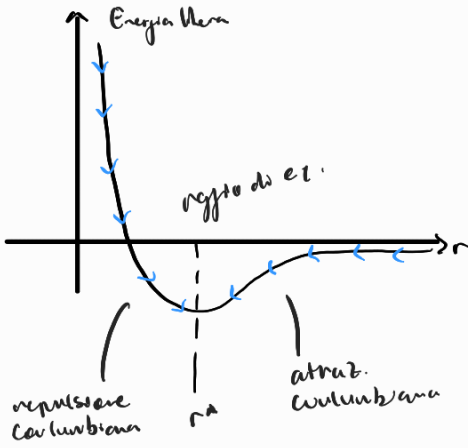
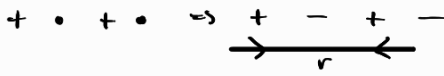
↳ demo tutti ibridizzati sp^3

struttura della zinco-blenda (diamante) (ZnAs, PbS)

FCC di Gallio FCC di Arsenico

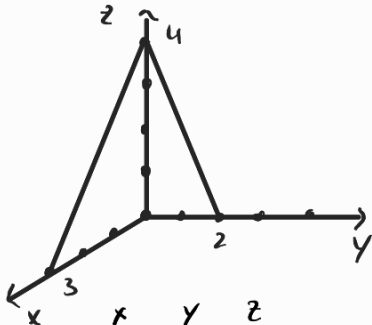


• i metalli prediligono strutture FCC e BCC perché hanno un PF maggiore
 ⇒ i metalli vogliono usare il minor numero di energia libera del sistema, tendono a compattarsi



• quando sono lontani l'attraz. Coulombiana aumenta gli atomi; Peró a un punto vicino in cui si attrahono e respingono.
 \hookrightarrow ho un r^* ottimale di energia minima

Indici di Miller

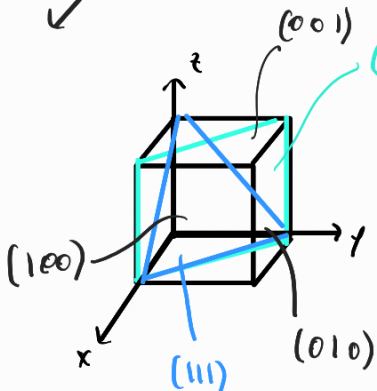
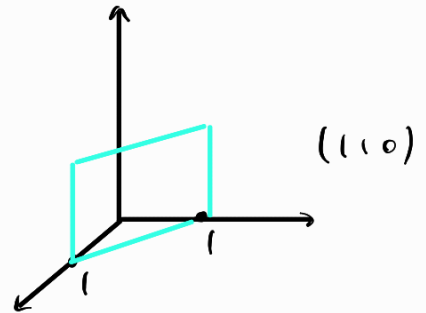
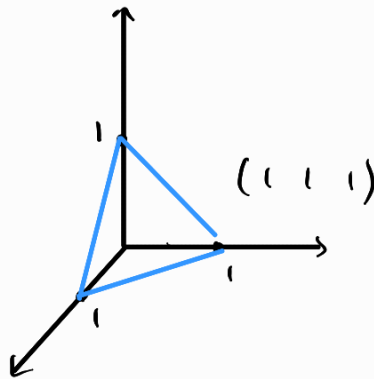
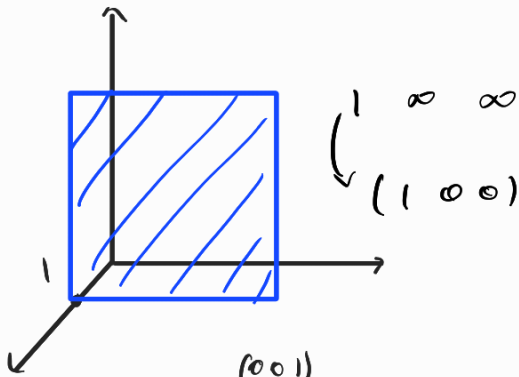


nesso identifiem vari piani

x	y	z
3	2	4
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{3} \cdot 12$	$\frac{1}{2} \cdot 12$	$\frac{1}{4} \cdot 12$

(LCM=12)
 $\Rightarrow (4 \ 6 \ 3)$

se ho numeri ug. $\Rightarrow (4 \ \bar{6} \ 3)$
 $(4 \ 6 \ -2)$



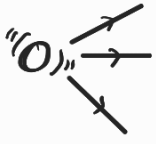
$\{110\} = (110), (011), (101) \dots$
 \uparrow famiglia di piani eq.

meccanica quantistica

• fisica del discreto, piccolo

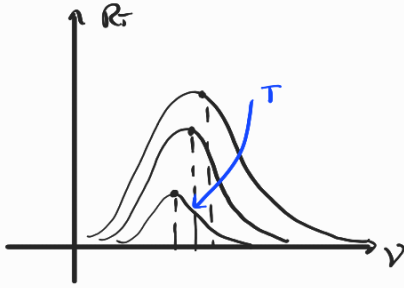
radiaz. del corpo nero

radiaz.: caratteri di un corpo di irraggiare



• un corpo, avendo delle particelle che si muovono (agitaz. termica), irraggia a varie lunghezze d'onda, in base alla temp.

corpo nero: corpo ideale. Tutta la radiaz. che incide viene assorbita.



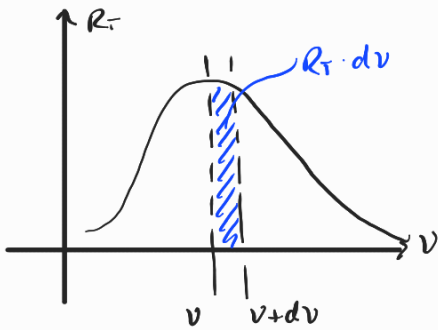
R_T : radianza spettrale $\left[\frac{J}{s \cdot cm^2 \cdot Hz} \right]$

$R_T(\nu) \cdot d\nu \Rightarrow$ radiaz. tra ν — $\nu + d\nu$
(sono in un intervallo di freq.)

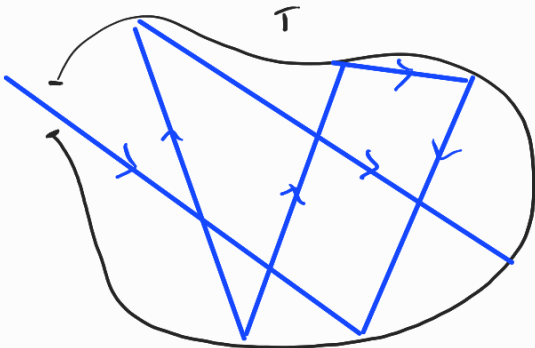
$$\int_0^{\infty} R_T d\nu = \sigma T^4 \quad \text{legge dell'irraggiamento (di Stefan)} \quad (1879)$$

$$T \cdot \lambda_{max} = 2,9 \cdot 10^{-3} \frac{[m \cdot K]}{K} \quad \text{legge di Wien} \quad (1893)$$

metri kelvin

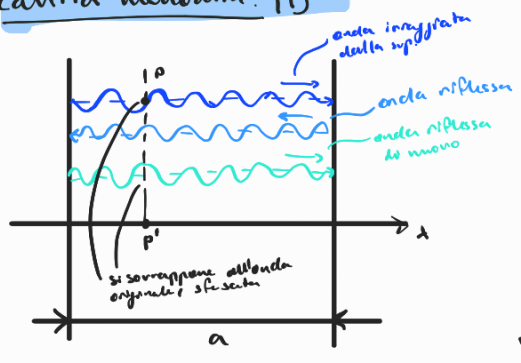


modellizzaz. del corpo nero



- la luce che entra nella cavità è improbabile che fuoriesca
- la sup. è ad una certa temp. T, quindi irraggia all'eq. \Rightarrow devono essere soddisfatte certe condiz. affinché l'eq. venga rispettato
- vogliamo dare una espressione analitica della R_T in uscita dal foro della cavità
 \rightarrow obiettivo è la densità di energia all'interno della cavità

canali monodim. 1D

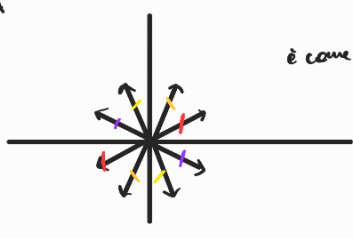


• nascono degli effetti: costruttivi e distruttivi d'interferenza

la sfasatura dipende dal cammino ottico: $2a$

le onde che tornano sfasate dopo un percorso ottico di $2a$ non possono esistere all'interno del corpo, quindi tutte quelle che percorrono $2a, 4a, 6a$ e s: se non sono sfasate non esistono

è come sommare tanti fasci sfasati:
 \hookrightarrow sommandoli tutti si annullano



l'onda viene sfasata:

$$e^{i(kx - \omega t)} \cdot e^{ikx}$$

↑
termine di sfasamento

$\Rightarrow e^{ikx} = e^{ik(x+2a)} \Rightarrow e^{ik2a} = 1 = e^{i2\pi n}$ soddisfatto per $e^{ikx} = e^{i2\pi n}$, condiz. di interf. costruttiva (si sommano in fase)

sfasatura nella pos. x (P)
 sfasatura nel punto $x+2a$ (P')

$\Rightarrow k2a = 2\pi n \Rightarrow k = \frac{\pi}{a} \cdot n$ ($n \in \mathbb{N}$)
 \hookrightarrow n' d'onde

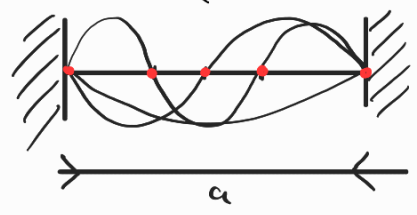
condizione di esistenza di modi

$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{a} \cdot n} = \frac{2a}{n}$

$\lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{n}{2a} \cdot c = \nu$

c'è un sotto insieme di freq. che possono essere modi
 \hookrightarrow i modi sono i raggi di luce frequenze ammesse nella cavità

è equivalente alle onde staz. ammesse tra due punti vicini di una corda vibrante (nel corpo nero possiamo pensare che le pareti su cui riflettono le onde sono dei punti fissi)



$a = n \cdot \frac{\lambda}{2}$ (che si traduce poi nel $\nu = \frac{c}{2a} \cdot n$ trovato prima)

onda staz.: oscilla nel tempo ma ha dei modi
 (vs. onda viaggiante dove anche i nodi si spostano)

↑ dei punti fermi che hanno sempre modulo ϕ

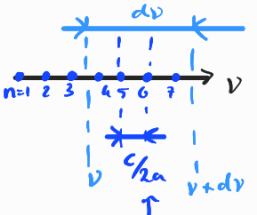
$$e^{i(kx - \omega t)} + e^{i(-kx - \omega t)} = \frac{(e^{ikx} + e^{-ikx})}{2} \cdot e^{-i\omega t} = \cos(kx) \cdot e^{-i\omega t}$$

(la presenza del cos mi identifica la stazionarietà dell'onda)

\Rightarrow due onde viaggianti in verso opposto con qual modo danno un'onda staz.

onde in verso opposto

ci chiediamo ora: quanti modi ci sono tra ν e $\nu + d\nu \rightarrow \underbrace{N(\nu) \cdot d\nu}_{\text{densità di modi}}$



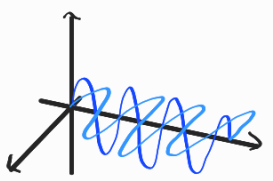
free spectral range: non c'è radiaz. in questo range

$\frac{d\nu}{\nu/2a}$ ov da il n' di intervallari $\frac{c}{2a}$ nell'intervallo $d\nu$

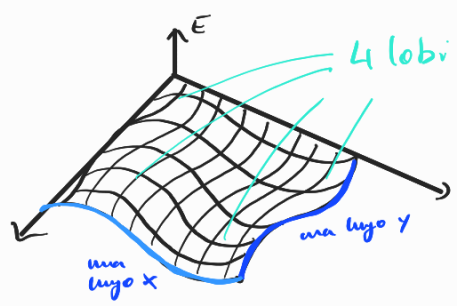
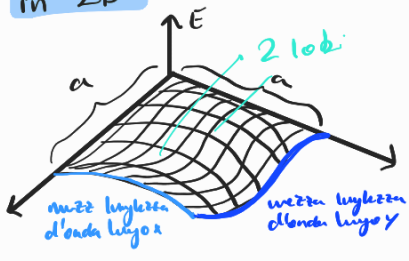
$N(\nu) d\nu = 2 \cdot \frac{dV}{\frac{c}{2a}} \cdot \frac{1}{a}$ n° di modi $\Rightarrow N(\nu) d\nu = \frac{4}{c} \nu^3 d\nu$ (10)

↑
 i nodi $z=0$
 per la dim.
 della cavità

ci sono 2 polarizz. dell'onda EM
 (campo E e campo B), ciascuna
 a cui posso associare un'ang. m.
 cioè per una freq. ho 2 raggi



in 2D



volgo trovare le freq. di vibraz. della membrana

$\Rightarrow E = E_0 \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \cdot \sin(\omega t)$

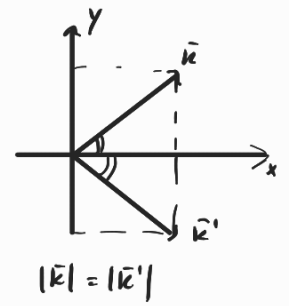
ho un vincolo su k_x e su k_y

$$\begin{cases} a = n_x \frac{\lambda_x}{2} \Rightarrow k_x = \frac{\pi}{a} n_x \\ a = n_y \frac{\lambda_y}{2} \Rightarrow k_y = \frac{\pi}{a} n_y \end{cases}$$

che relaz. c'è tra k_x, k_y e ν ? (ho due vincoli per k_x e k_y ma non ci trovano le freq. ammesse di modi)
 \uparrow
 $(\omega = 2\pi\nu)$

$$\begin{aligned} E &= E_0 \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y) \cdot \sin(\omega t) \\ &= E_0 \frac{e^{ik_x x} - e^{-ik_x x}}{2i} \cdot \frac{e^{ik_y y} - e^{-ik_y y}}{2i} \cdot \sin(\omega t) \\ &= \frac{-E_0}{4} \left\{ \frac{e^{i(k_x x + k_y y)} - e^{i(k_x x - k_y y)}}{2} - \frac{e^{i(k_y y - k_x x)} - e^{i(k_x x + k_y y)}}{2} \right\} \cdot \sin(\omega t) \\ &= \frac{-E_0}{2} \cdot \left\{ \frac{e^{i(k_x x + k_y y)} - e^{-i(k_x x + k_y y)}}{2} - \frac{e^{i(k_x x - k_y y)} - e^{-i(k_x x - k_y y)}}{2} \right\} \cdot \sin(\omega t) \\ &= \frac{-E_0}{2} \cdot \left\{ \cos(\underbrace{k_x x + k_y y}_{\vec{k} \cdot \vec{r}}) - \cos(\underbrace{k_x x - k_y y}_{\vec{k}' \cdot \vec{r}}) \right\} \cdot \sin(\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \vec{k} = [k_x \ k_y] \\ \vec{k}' = [k_x \ -k_y] \\ \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{cases}$$



$|\vec{k}| = |\vec{k}'| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \frac{\pi}{a} \cdot \sqrt{n_x^2 + n_y^2}$ ho ottenuto un "unico k"

$\Rightarrow \lambda = \frac{2a}{k} \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2a} k = \frac{c}{2a} \frac{\pi}{a} \sqrt{n_x^2 + n_y^2} = \frac{c}{2a} \cdot n \quad n_x, n_y \in \mathbb{N}$

"stesso" risultato in 1D solo che ora $n \notin \mathbb{N}$

$\Rightarrow \nu = \frac{c}{2a} \sqrt{n_x^2 + n_y^2}$ con $n_x, n_y \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \nu = \frac{c}{2a} n$ con $n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}, n_x, n_y \in \mathbb{N}$

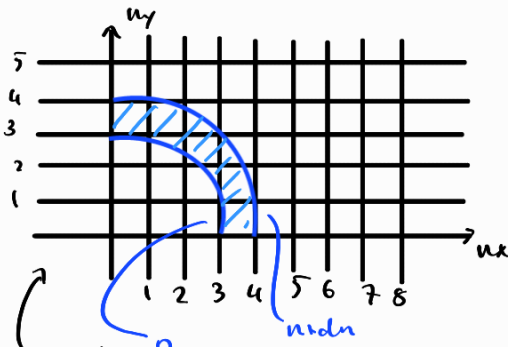
$$N(\nu)d\nu = \frac{4}{c} d\nu$$

effettivo un cambio di var. : $\nu = \frac{c}{2a} \cdot n \Rightarrow d\nu = \frac{c}{2a} dn$

$$\Rightarrow N(\nu)d\nu = N(n)dn$$

(raggio)

in 2d : $n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}$ (è una circonferenza nel piano)



quanti n_x, n_y cadono nell'intervallo n e $n+dn$? Cioè voglio trovare il n° di modi fra n e $n+dn$.

$(0,0)$ non è un modo ammesso. Avrei $\nu = 0, \lambda = \infty$ che non ha senso

$$\Rightarrow N(n)dn = 2 \cdot \frac{2\pi n dn}{4} \cdot \frac{1}{1} = n^2 dn = n^2 dn$$

\uparrow sup. della corona
 \uparrow 2 modi per ogni freq. ammessa
 \uparrow $\frac{1}{4}$ di corona
 \uparrow area della cella unitaria
 \uparrow (1 modo + altro)

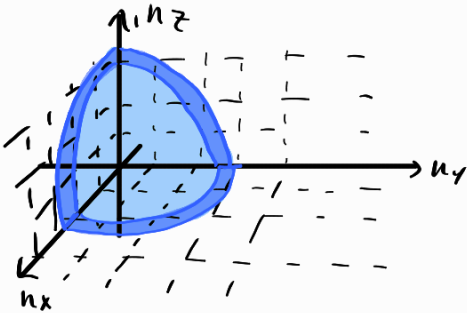
$$\hookrightarrow N(\nu)d\nu = \pi n^2 dn = \pi \frac{2a}{c} \nu dn = \pi \left(\frac{2a}{c}\right)^2 \nu d\nu = \frac{4\pi}{c^2} \nu d\nu (= \pi n^2 dn)$$

\uparrow $n = \frac{2a}{c} \nu$
 \uparrow $dn = \frac{2a}{c} d\nu$
 \uparrow dovuto per a^2 per normalizzare rispetto l'area

$$\Rightarrow N(\nu)d\nu = \frac{4\pi}{c^2} \nu d\nu \quad (\propto \nu)$$

in 3D

$n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$ (onde con 3 vetti d'onda, k_x, k_y, k_z)



$$N(n)dn = 2 \cdot \frac{4\pi n^2 dn}{8} \cdot \frac{1}{1} = n^3 dn = n^3 dn$$

\uparrow 2 modi per freq.
 \uparrow 1 ottante
 \uparrow area cella

$$\nu = \frac{c}{2a} n \Rightarrow N(n)dn = \pi n^3 dn = \pi \frac{4a^3 \nu^3}{c^3} d\nu = \pi \frac{4a^3 \nu^3}{c^3} \cdot \frac{2a}{c} d\nu \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^3 d\nu$$

\uparrow normalizzo per il volume

$$\Rightarrow N(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^3 d\nu \quad (\propto \nu^3)$$

densità di energia

- abbiamo dunque trovato un n°/densità di modi, adesso devo associargli un'energia
- i modi sono raggi potenzialmente ammessi, non è detto che poi ci siano effettivamente.
- ↳ devo valutare $\langle E \rangle$

principio equipartiz. dell'energia $\Rightarrow \langle E \rangle = \frac{2}{2} kT = kT$
 (termodinamica classica)

↳ 2 gradi di libertà : es. pendolo



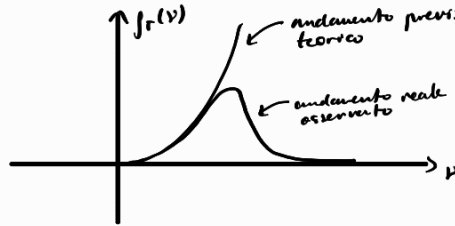
- 1) energia associata alla velocità
↳ energia cinetica
- 2) energia associata alla posiz.
↳ energia potenziale

$$\int_1(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^3 kT d\nu \quad (n^3 \text{ modi} \cdot \text{energia associata})$$

↑
densità spettrale di energia alla temp. T

$$\int_T(\nu) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 kT d\nu \Rightarrow \int_T(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 kT$$

Formula di Rayleigh-Jeans



nuova teoria di Planck (1905)

Planck si concentra su $\langle E \rangle = \frac{1}{2} kT$ e pensa che sia il errore

$$\langle E \rangle = \frac{\int E \cdot P(E) dE}{\int P(E) dE} = \frac{\int E \cdot e^{-\frac{E}{kT}} dE}{\int e^{-\frac{E}{kT}} dE} = kT \quad (\text{se } E \text{ continuo})$$

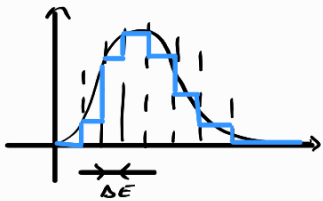
$$\langle E \rangle = \int x P_x(x) dx$$

$\int P_x(x)$ sarebbe $P_c(E)$ normalizzato

↑ distrib. probabilistica di energia (non è una distrib. di prob.)

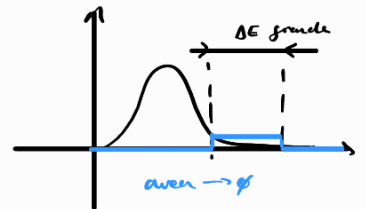
ma se a E quantizzata $\Rightarrow \int_0^\infty E \cdot P(E) dE \Rightarrow \sum_{n=0}^\infty n \Delta E^2 e^{-\frac{n \Delta E}{kT}}$

↑ $e^{-\frac{E}{kT}}$
↑ $(E = n \Delta E)$



$$\frac{\sum n \Delta E^2 e^{-\frac{n \Delta E}{kT}}}{\sum e^{-\frac{n \Delta E}{kT}}} \rightarrow \emptyset \quad \text{per } \Delta E \rightarrow \infty$$

Intuitivamente:



È un indizio che potrebbe spiegarci perché a HF $E \rightarrow \emptyset$



Planck pensa: $\Delta E = nh\nu$ $n \in \mathbb{N}$

Cost. di Planck

quindi: BF $\Rightarrow \Delta E$ piccolo e approx. bene (Integrale)
HF \Rightarrow il rapporto (energia fot. del sistema) $\rightarrow \emptyset$

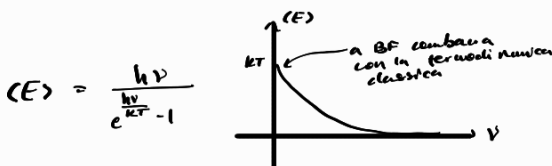
serie geo.: $\sum q^n$ con $q = \frac{1}{e^x}$

$$\Rightarrow \frac{\sum n h \nu e^{-\frac{n h \nu}{kT}}}{\sum e^{-\frac{n h \nu}{kT}}} = kT \cdot \frac{\sum n x e^{-n x}}{e^{-n x}} = -kT x \cdot \frac{d}{dx} \log(\sum e^{-n x})$$

↑ $x = \frac{h\nu}{kT}$

infatti: $\frac{d}{dx} \log(\sum e^{-n x}) = \frac{1}{\sum e^{-n x}} \cdot \sum (-n) e^{-n x} = -\frac{\sum n e^{-n x}}{\sum e^{-n x}}$

$$\Rightarrow -kT x \frac{d}{dx} \log\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right) = kT x \frac{d}{dx} \log(1-e^{-x}) = kT x \cdot \frac{1}{1-e^{-x}} \cdot e^{-x} = kT x \cdot \frac{1}{e^x - 1} \Rightarrow \langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$



l'energia del fotone aumenta al crescere di ν . Perché allora $\langle E \rangle \rightarrow \emptyset$ per $\nu \rightarrow \infty$?

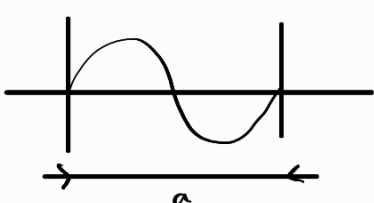
La nonostante l'energia del fotone cresce, più è alta l'energia meno è probabile che ci sia ($P(E) = e^{-\frac{E}{kT}}$)
↑
no con prob. di avere alta energia

$$\Rightarrow \int_T(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$E = nh\nu$ (verrà più corretto a $E = (n + \frac{1}{2}) h\nu$)

$E = h\nu$ energia del singolo fotone

La cioè i modi hanno associati dei pacchetti di energia discreti (fotoni)



$$\begin{cases} \nu = \frac{c}{2a} n \\ \lambda = 2a \cdot \frac{1}{n} \end{cases}$$

gli associamo anche una qb. di moto: $P = \frac{h}{\lambda}$ (qb. moto del fotone)

$$\vec{p} \begin{cases} E = h\nu \\ p = h\nu/c \end{cases}$$

quanto di energia, corpuscolo di luce
 $(h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ [J}\cdot\text{s)]}$ cost. di Planck

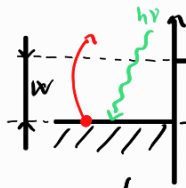
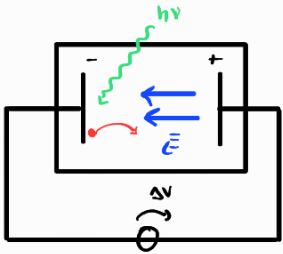
caratteristiche corpuscolari.

$$\vec{p} \begin{cases} \nu \\ \lambda \end{cases}$$

caratteristiche ondulatorie

effetto fotoelettrico

l'onda è un campo oscillante. L'elettrone dunque viene accelerato e acquisisce E_k , suff. per superare la soglia di energia (W - work function) per liberarsi dal metallo



livello di vuoto \Rightarrow devo compiere un lavoro (positivo) per portare l'elettrone nel vuoto - dunque il vuoto è a un livello energetico più alto del metallo

livello di Fermi

W : lavoro che devo compiere per estrarre un elettrone

$U = -qV > 0$: energia pot. dell'elettrone

$(q = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})$

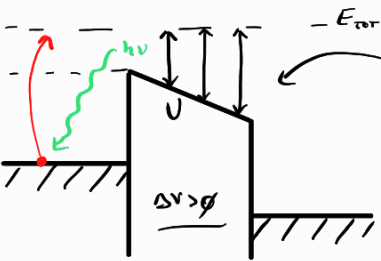
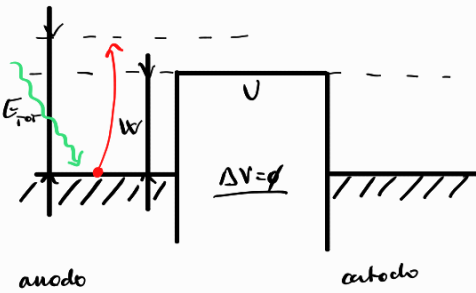
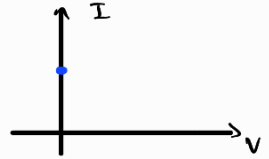
gli elettroni risiedono qui

• $\Delta V = 0 \Rightarrow$ anodo e catodo allo stesso livello energetico

• $E_{\text{tot}} = \frac{p^2}{2m} + U$ energia tot. dell'elettrone

• E_k cost. \Rightarrow l'elettrone arriva al catodo con $v_{\text{cost.}}$ (non ci sono forze esterne in gioco che possano accelerare l'elettrone, essendo $\Delta V = 0$ e quindi $\vec{E} = 0$)

• vedo una corrente, anche in assenza di $\Delta V \Rightarrow$

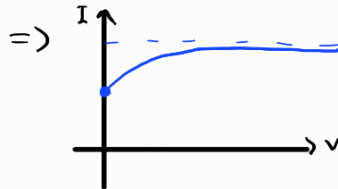


U decrease lin. $\Rightarrow \vec{E} = -\Delta V$, \vec{E} è un campo cost. $\Rightarrow V$ è lineare

• $K = E_{\text{tot}} - U$ cresce lin. \Rightarrow l'elettrone viene accelerato dal campo \vec{E} cost.

• scorge una certa corrente, maggiore di prima questo perché con $\Delta V = 0$ non tutti gli elettroni ce la fanno ad arrivare al catodo (vengono estratti a "casaccio"). con $\vec{E} \neq 0$ vengono raccolti e portati al catodo più efficientemente

$\hookrightarrow I$ cresce e poi satura (ho una I_{max} perché al più posso raccogliere tutti gli elettroni emessi)

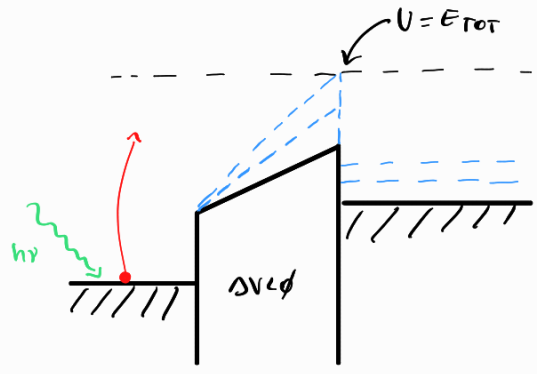


• l'elettrone fa più fatica a sorpassare la soglia di potenziale e arrivare all'altro elettrodo

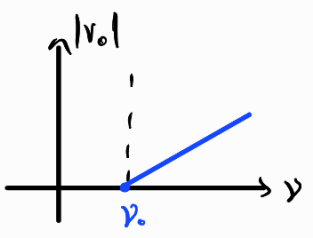
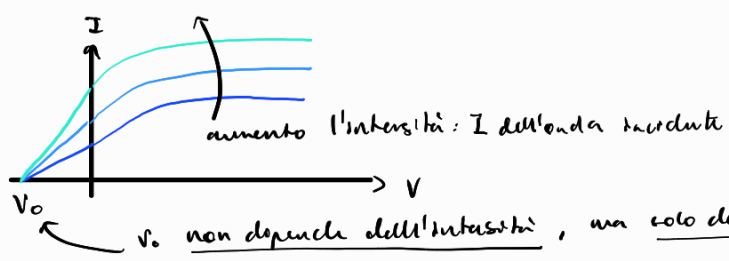
• $K = E_{\text{tot}} - U$ decrease lin. perché l'elettrone viene respinto dal campo \vec{E} \hookrightarrow cresce lin.

• a una certa tensione cessa di scorgere corrente

\hookrightarrow condiz. \exists corrente $\Rightarrow E_k = \frac{p^2}{2m} \geq \phi$



• l'elettrone non ce la fa più ad altre passare la soglia
 ↳ condiz. limite: $K = E_{TOT} - U \geq 0 \Rightarrow K = \phi = E_{TOT} - U \Rightarrow U = E_{TOT}$
 • $\exists V_0$ t.c. $U = E_{TOT}$

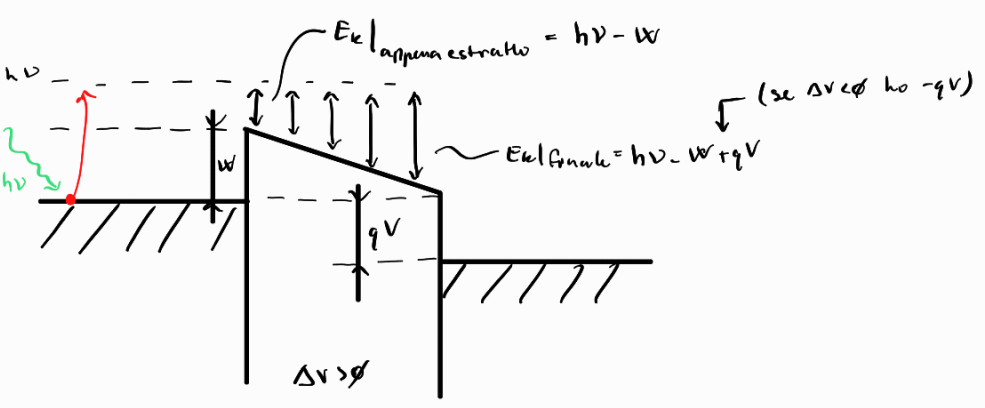


• per $\nu < \nu_0$ non osservo più l'effetto fotoelettrico

- V_0 è una misura dell'energia dell'elettrone
- aumentando I (intensità) dovrei vedere cambiare V_0 perché aumento E_{TOT} e quindi servirebbe una V_0 (e quindi bassa energia) maggiore per contrastare l'elettrone
- un altro problema è proprio l'esistenza di una V_0 limite. Dovrei riuscire a compensare la BF con una maggiore, più alta intensità. Ma V_0 è solo dipendente da ν . (il problema non è la dipendenza dalla freq., ma la non dipendenza dall'intensità)

↳ Einstein (1906)

- applica la teo. dei quanti di Planck
- $E = h\nu$ energia acquistata dall'elettrone
- quante l'energia cinetica resistente appena fuoriuscita dall'elettrodo?



condiz. \exists corrente $\Rightarrow E_{k|finale} = h\nu - W + qV = \frac{p^2}{2m} \geq 0$

↳ $\nu \geq \frac{(h\nu - W)}{q} := V_0$

(se $h\nu > W$ vuol dire che l'energia acquistata è suff. da superare la soglia. se così non fosse $V_0 > \phi$ che non ha senso)

↳ dipende solo da ν ! $V_0 \propto \nu$

$V_0 = -\frac{h}{q}\nu + \frac{W}{q} \Rightarrow$

per trovare V_0 limite:

$V_0 = \phi \Rightarrow V_0 = W/h$

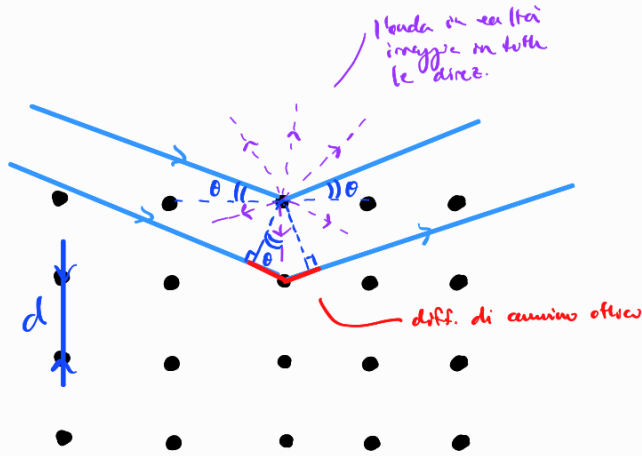
	onde	particelle
prop. ondulatorie	λ, ν, I	$\lambda = h/p$ $\nu = E/h$
prop. corpuscolari	$E = h\nu$ $p = h/\lambda$	$p = m\nu$ $E = \frac{p^2}{2m} + U$

potrebbe essere che anche le particelle hanno prop. ondulatorie

↳ de Broglie (anni '20)

comportamento caratteristico delle onde \Rightarrow interferenza / diffrazione

esperimento di diffraz. di Davisson-Gerner



• reticolo cubico di Nichel: lo uso come reticolo di diffraz.

• DS diff. angolo retico = $2d \sin \theta$

per avere interf. costruttiva $\Rightarrow 2d \sin \theta = n\lambda$

↳ $\sin \theta = \frac{n\lambda}{2d} \leq 1 \Rightarrow \lambda \leq 2d$ è un vincolo sulle lunghezze d'onda che posso usare per questo esperimento

$d \sim \text{\AA}$ (0,1nm) \Rightarrow devo usare raggi X

diffraz. di Bragg

• mi interessa solo la riflessione secondo la legge di Snell, ignoro tutti gli altri fasci che irraggiano nelle altre direz. è una iper-semplificaz. che però rende fattibile la trattaz. della diffrazione del reticolo di nichel

$V = 50 \text{ eV} = K$ energia che si mette sul piano

$$d = 0,91 \text{ \AA}$$

↳ vedo dei picchi di diffraz. \Rightarrow effettivamente gli elettroni hanno prop. ondulatorie!

misurano anche $\theta = 65^\circ$:

$$2d \sin \theta = \lambda = 1,65 \text{ \AA}$$

$$2 \cdot 0,91 \text{ \AA} \cdot \sin 65^\circ$$

$$\lambda_{\text{de Broglie}} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = 1,65 \text{ \AA}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + U$$

(ho solo energia cinetica)

\Rightarrow cioè la previsione teorica di de Broglie coincideva con i risultati sperimentali!

de Broglie (1924)

Schrödinger (1926)

Born (1927)

eq. Schrödinger

$$\begin{cases} \lambda = h/p \\ v = E/h \end{cases}$$

• $\Psi(x,t)$ risultato dell'eq. di Schrödinger, simile al modo in cui E è sol. dell'eq. di Maxwell
 ⇒ similmente ad E , è il modulo quadro che ci dà info interessanti ⇒ $|\Psi|^2$ dà la densità di prob. di trovare l'elettrone

"requisiti" eq. di Schrödinger

- * eq. diff. alle derivate parziali
- * compatibilità con principio di conservaz. energia ⇒ $E = k + V$ (energia potenziale)
- * $\lambda = h/p$; $v = E/h$ ($k = p/m$)
- * $V = V_0 = \text{cost.} \Rightarrow k \text{ cost.} \Rightarrow p \text{ cost.} \Rightarrow \lambda \text{ cost.}$
- * linearità ⇒ con la sovrapp. eff. nascono gli effetti di interferenza

$$\Psi_1, \Psi_2 \longrightarrow \Psi = a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi_2$$

$$k + V = E \Rightarrow \frac{p^2}{2m} + V = E \Rightarrow \frac{h^2}{2m\lambda^2} + V = h\nu$$

$$\begin{cases} \lambda = h/p \\ E = h\nu \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = h/\lambda = \frac{h}{2\pi} k = \hbar k \\ h\nu = h \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \hbar\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} E = \hbar\omega \\ p = \hbar k \\ k = p/\hbar \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Psi \cdot \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V \right) = \Psi \cdot \hbar\omega$$

considero $V = V_0 = \text{cost.}$ (generalmente $V = V(x,t)$) ⇒ se $V = \text{cost.}$, $\lambda = \text{cost.}$

↳ Ψ è una onda piana: $\Psi(x,t) = \Psi_0 e^{i(kx - \omega t)}$
 (non è rigoroso dire che lo è, però è plausibile come ipotesi. Effettivamente poi è così.)

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \Psi_0 \cdot (ik) e^{i(kx - \omega t)} = ik\Psi \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \Psi_0 (ik)^2 e^{i(kx - \omega t)} = -k^2\Psi \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \Psi V = \frac{-1}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Psi_0 (-i\omega) e^{i(kx - \omega t)} = -i\omega\Psi \end{cases}$$

⇒ generalizzo a $V = V(x,t)$ (non è una dm. questa, sono i "passaggi logici" per arrivare alla eq. finale)

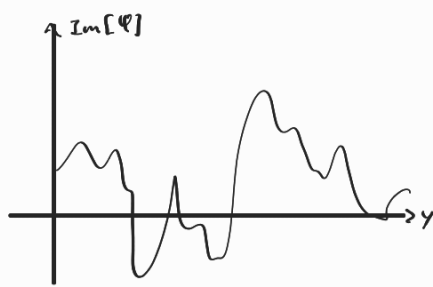
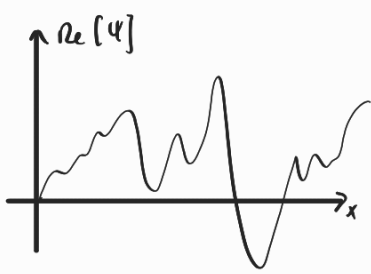
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \Psi V(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

eq. di Schrödinger (monodim.)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + \Psi V(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

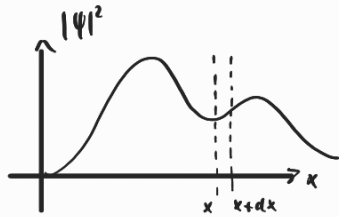
(in 3D)

- Schrödinger esprime una eq. che incorpora la teo. di de Broglie
- Born ci dà il significato di Ψ



$$|\psi|^2 = \psi^* \cdot \psi$$

$$\psi^* = \psi_0^* e^{-i(kx - \omega t)} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow |\psi|^2 dx = P(x) dx$$

prob. di trovare
la particella tra
x e x+dx

normalizziamo: $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$ (attenzione: non normalizzabili le onde piane)

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* x \psi dx \quad \text{val. d'aspettazione della pos. } x$$

cioè non so dove sta la particella, so dove sta mediamente

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* f(x) \psi dx$$

posso def. anche per la qt. di moto p_x ? \Rightarrow NO!

$$\langle p_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* p_x(x) \psi dx$$

↑
non riesco a determinare $p_x(x)$

principio di indeterminaz. di Heisenberg

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \neq 0$$

↑
indeterminaz. della pos. ↑
indet. della qt. di moto

$$\Delta p_x \text{ può } \rightarrow 0 \text{ però } \Delta x \rightarrow \infty$$

(o viceversa)

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ però } \Delta p_x \rightarrow \infty$$

se potessi trovare $p_x(x)$ (quindi sapendo x : $\Delta x \rightarrow 0$) determinerei $p_x(x)$ tunc il principio di indet. di Heisenberg ci dice che non è possibile

$$\psi(x,t) = \psi_0 e^{i(kx - \omega t)} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = \psi_0 \cdot ik e^{i(kx - \omega t)} = \psi \cdot ik$$

$$-i\hbar \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = ik\psi \cdot i\hbar \Rightarrow -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} = \underbrace{\hbar k}_{p} \psi = p\psi = \hat{p}\psi$$

↳ introduco un operatore momento: $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

$$\hookrightarrow \langle p_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{p} \psi dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}) dx$$

(nel caso di onda piana $\langle p_x \rangle$ è un valore preciso
↳ ho una delta di Dirac. In gen. $\langle \rangle$ potrebbe, per esempio, essere il val. medio di una Gaussiana)

generalizzando il concetto:

$$\langle f | = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{f} \psi dx$$

↑
operatore

$$\hat{f} \psi_f = f \psi_f \quad (\Leftrightarrow) \text{ (analisi con autovet. e autoval. : } A\vec{v} = \lambda\vec{v})$$

↑
autofunzione

↖ corrispondenti autovalore

$$K = \frac{p^2}{2m}$$

$$\hookrightarrow \hat{K} = \hat{p}^2 \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2m} (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \cdot (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Rightarrow \hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

↑
operatore applicato 2 volte

operatore energia cinetica

$$\psi = \psi_0 e^{i(kx - \omega t)} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi_0 \cdot (-i\omega) e^{i(kx - \omega t)} = -i\omega \psi$$

$$\Rightarrow \hbar \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega \psi \cdot \hbar \Rightarrow \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \underbrace{\hbar \omega}_{E} \psi \Rightarrow \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

operatore energia tot.

$$\hat{E} = \hat{K} + \hat{V} \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V$$

↑
 $\hat{V} = V$ è solo fun. di x e t

è l'eq. di Schrödinger!!

↳ cioè l'eq. di Schrödinger è la conservaz. dell'energia espressa in modo operatoriale

commutatore

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

prova a commutarli

↳ se l'ordine è indifferente $\Rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = 0$

$\Rightarrow \hat{A}, \hat{B}$ condividono le stesse autofunzioni:

$$\begin{cases} \hat{A}f = Af \\ \hat{B}f = Bf \end{cases}$$

$$\hat{x} = x$$

$$\downarrow$$

$$[x, \hat{p}_x] \psi = x (-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}) + (i\hbar \frac{\partial}{\partial x} [x\psi])$$

$$= -ix\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\hbar \left\{ 1 \cdot \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot x \right\}$$

$$= -ix\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\hbar \psi + ix\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$= i\hbar \psi$$

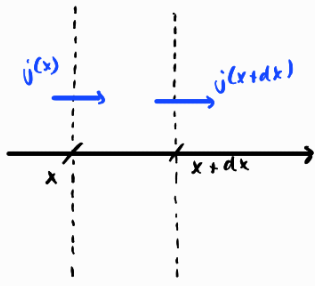
$\Rightarrow [x, \hat{p}_x] = i\hbar \neq 0 \Rightarrow x$ e \hat{p}_x non commutano \Rightarrow non hanno le stesse autofunzioni. Sono in dissidio fin di loro \Rightarrow sono afflitte da una indeterminaz. di Heisenberg

$$[\hat{p}_x, \frac{\hat{p}_x^2}{2m}] = 0 \Rightarrow \text{op. qt. di moto e op. energia cinetica commutano} \rightarrow \text{una autofunz. di } \hat{p} \text{ lo è anche di } \hat{K}$$

↳ se so una so anche l'altra con precisione ∞ (come mi aspetterei d'altronde, se so \hat{p}_x so anche $\hat{p}_x/2m$)

flusso quantistico

• j flusso di particelle descritte da Ψ



$$\Rightarrow j(x) - j(x+dx) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dx$$

\uparrow Flusso entrante
 \uparrow Flusso uscente
 \uparrow moltiplica per il volume (in questo caso monodim.)
 \uparrow probabilità (essendo le particelle governate da Ψ si parla sempre di probabilità)

flusso: $\left[\frac{\text{nr. particelle}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \right]$

se $j(x) > j(x+dx) \Rightarrow$ aumenta la probabilità di trovare particelle tra x e $x+dx$

se $j(x) < j(x+dx) \Rightarrow$ diminuisce la probabilità di trovare particelle tra x e $x+dx$

$$j(x) - j(x+dx) = \cancel{j(x)} - \left[\cancel{j(x)} + \frac{\partial j}{\partial x} dx \right] \Rightarrow -\frac{\partial j}{\partial x} dx = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dx \Rightarrow \boxed{-\frac{\partial j}{\partial x} = \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t}}$$

\uparrow sviluppo di Taylor al 1° ordine
 \uparrow $|\Psi|^2 dx = \rho$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\Psi^* \Psi] = \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \cdot \Psi + \Psi^* \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

eq. Schrödinger: $-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + V\Psi^* = -i\hbar \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} [\Psi^* \Psi] = \frac{1}{i\hbar} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \cdot \Psi - V\Psi^* \Psi - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Psi^* + V\Psi \Psi^* \right)$$

qui cambia il segno perché quando faccio la derivata del complesso coniugato rispetto al tempo: $e^{i(kx - \omega t)}$

$$= \frac{\hbar}{2mi} \left(\Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} - \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) = \frac{\hbar}{2mi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \cdot \Psi - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \cdot \Psi^*$$

$$= \left(\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \cdot \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \cdot \Psi^* \right)$$

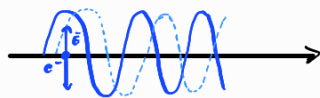
$$\Rightarrow -\frac{\partial j}{\partial x} = \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} = \frac{\hbar}{2mi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \Rightarrow \boxed{j = \frac{\hbar}{2mi} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right)}$$

def. flusso quantistico

risoluz. eq. Schrödinger

• per semplificarci la vita poniamo potenziale indipendente dal tempo

$V(x, t)$ è funz. della pos. e del tempo



$\vec{E} = -DV \Rightarrow$ È sinusoidale, funz. di x e t

↳ gen. nei dispositivi elettronici non è questo il caso $\Rightarrow V = V(x)$

l'eq. di Schrödinger diventa:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \cdot \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$$

$\Psi(x, t) = \Psi(x) \cdot \Psi(t)$ ipotesi

↳ non si separano le var. per avere delle eq. diff. separate, una nel tempo e una nello spazio

$$\Rightarrow \frac{-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \cancel{\psi(x)} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x) \cancel{\psi(x)}}{\psi(x) \cdot \cancel{\psi(x)}} = \frac{i\hbar \cancel{\psi(x)} \frac{\partial \psi(x)}{\partial t}}{\psi(x) \cdot \cancel{\psi(x)}}$$

$$\Rightarrow f(x) = g(t) \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} f(x) = E \text{ (una cost.)} \\ g(t) = E \end{cases}$$

↑ ↑
eq. diff. con var. separate

F(x) ⇒ $\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi = E\psi$ eq. Schrödinger indipendente dal tempo

↳ $\hat{H}\psi = E\psi$

ψ : autofunzione (dell'operatore Hamiltoniano)
 E : autovalore (dell'operatore Hamiltoniano)

operatore Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

operatore associato all'energia quando operiamo sulla $\psi(x)$

g(t) ⇒ $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar} \psi(t) \Rightarrow \psi(t) = \psi_0 e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$

quando risolvono trovo più autofunzioni e autovalori corrispondenti: $V(x) \rightarrow \hat{H}\psi = E\psi \rightarrow$ autofunz. ψ_1, ψ_2, \dots
autoval. E_1, E_2, \dots

↳ la sol. gen. sarà, per la sovrapp. degli effetti: $\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t}$ è lo stato "puro", generale in cui si trova l'elettrone
coeff. generalmente complesso, contiene ψ_0

autostato: $\psi(x,t) = a_n \psi_n(x) e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t} \rightarrow$ stato stazionario

• stazionario perché: $|\psi|^2 = |a_n|^2 |\psi_n|^2$ non dipende da t

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n a_n^* \psi_n^* e^{i\frac{E_n}{\hbar}t} \cdot \sum_m a_m \psi_m e^{-i\frac{E_m}{\hbar}t} dx$$

$$= \sum_{n,m} a_n^* a_m e^{-\frac{E_n - E_m}{\hbar}t} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi_m dx$$

↳ $\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{se } n=m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$ ⇒ sopravvivono solo i termini "diagonali" ($n=m$)
(perché le autofunz. sono ortonormali)

$$= \sum_n a_n^* a_n e^{-\frac{E_n - E_n}{\hbar}t}$$

$$\therefore \sum |a_n|^2 = 1$$

↑
avere un tot. di una d.d.p.

cioè $|a_n|^2$ mi dà la prob. di trovare l'elettrone in un certo stato

$|a_1|$ mi dice la prob. di trovare l'elettrone con stato E_1

$|a_2|$ mi dice la prob. di trovare l'elettrone con stato E_2

⋮
ecc.

concetto di misura

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) e^{-\frac{iE_n}{\hbar}t}$$

è lo stato puro generale. Cioè lo stato preciso dell'elettrone non è determinato. Potrebbe essere in uno dei qualunque stati energetici E_n

↓ misura (perturbo il sistema)

collasso in un certo stato E_n (la funz. d'onda "collassa")

$$\langle E \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) \hat{H} \psi(x,t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n a_n^* \psi_n^* e^{i\frac{E_n}{\hbar}t} \hat{H} \sum_m a_m \psi_m e^{-i\frac{E_m}{\hbar}t} dx$$

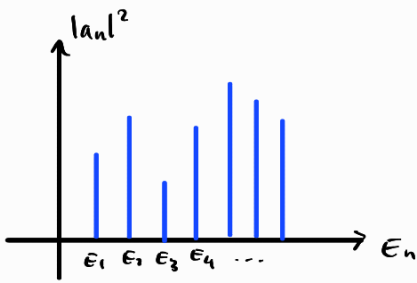
$$= \sum_{n,m} a_n^* a_m e^{-i \frac{E_n - E_m}{\hbar} t} \int \psi_n^* \hat{H} \psi_m d\tau \Rightarrow \langle E \rangle = \sum |a_n|^2 E_n$$

media pesata con prob. $|a_n|^2$

$$(\hat{H} \psi_m = E_m \psi_m)$$

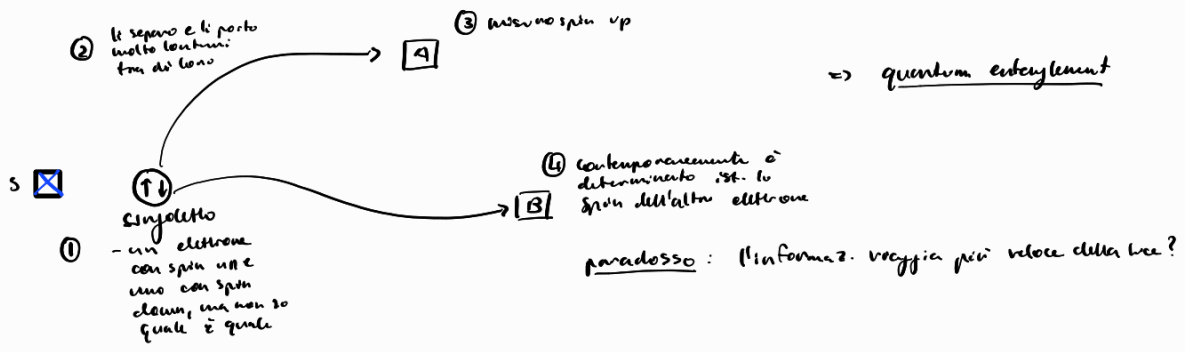
analogo a come avevamo trovato $\sum |a_n|^2$

peso probabilistico di trovare l'elettrone in uno stato



- prima di misurare l'elettrone, il suo stato è indeterminato, si trova in tutti questi stati contemporaneamente \rightarrow quando lo misuro lo trovo in un particolare stato
- la misuraz. mi proietta in un certo stato stazionario det. da una sola autofunz.
- ogni misura successiva mi mostrerà sempre lo stesso risultato, cioè se misuro l'elettrone nello stato E_3 con ogni misura succ. lo vedo sempre in E_3

paradosso Einstein-Podolsky-Rosen



\Rightarrow quantum entanglement

• abbiamo fatto interagire 2 due elettroni \Rightarrow ho una unica funz. d'onda che governa i due elettroni. Uno ha \uparrow e l'altro \downarrow , ma non so quale. La funz. d'onda mi dice solo che uno è \uparrow e l'altro \downarrow

caso $V=0$

eq. Schrödinger: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi = E\Psi$ ($\hat{H}\Psi = E\Psi$)

$\Rightarrow \Psi(x,t) = \Psi(x)e^{-i\omega t}$, $\omega = E/\hbar$

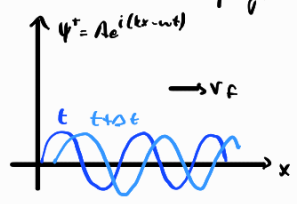
• consideriamo il $V=0$ particella libera, non ci sono forze

$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = E\Psi \Rightarrow \hat{K}\Psi = k\Psi$ $\hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ operatore energia cinetica
 ↑ qM autovalore su tutto E_k

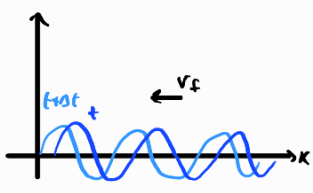
$\Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \Psi = -k^2 \Psi$ con $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

\Rightarrow risolvo $\Rightarrow \Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

$\hookrightarrow \Psi(x,t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{-i(kx + \omega t)}$ funz. d'onda staz. ($|\Psi|^2 = \text{cost.}$, non dipende da t)
 onda viaggiante progressiva onda viaggiante regressiva



$kx - \omega t = k(x + \Delta x) - \omega(t + \Delta t)$
 $kx - \omega t = kx + k\Delta x - \omega t - \omega\Delta t$
 $\Rightarrow k\Delta x = \omega\Delta t$
 $\Rightarrow \Delta x = \frac{\omega}{k} \Delta t$
 $\Rightarrow \frac{\omega}{k} = v_f$ velocità di fase



$\Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

• considero la progressiva per semplicità

$\langle p_x \rangle = \int \Psi^* (-i\hbar \frac{d}{dx}) \Psi dx$
 $= \int \Psi^* (-i\hbar \frac{d}{dx}) dx$
 $= \int \Psi^* (-i\hbar ik \Psi) dx$
 $= \hbar k \int \Psi^* \Psi dx$
 $= \hbar k$

$\Rightarrow \langle p_x \rangle = \hbar k$ ($-\hbar k$ se considero la regressiva)

• $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda} k = \hbar k \Rightarrow p = \hbar k$ ritrovo la relaz. di de Broglie

$\Psi = Ae^{ikx}$ è autofunz. sia dell'operatore energia cinetica, sia dell'operatore qt. di moto
 \hookrightarrow d'altronde ce lo potevamo aspettare, \hat{p} e \hat{k} commutano: $[\hat{k}, \hat{p}] = [\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{p}] = 0$

$\Rightarrow \hat{p}_x \Psi = p_x \Psi \Rightarrow -i\hbar \frac{d}{dx} \Psi = -i\hbar \cdot ik \Psi = \hbar k \Psi \Rightarrow \hat{p}_x \Psi = p \Psi$
 $\hookrightarrow \Psi = Ae^{ikx}$ è effettivamente una autofunz. di \hat{p}

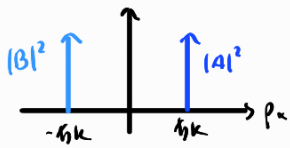
considerando $\Psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$:

$$\begin{aligned} \langle p_x \rangle &= \int \Psi^* \hat{p}_x \Psi dx = \int (Ae^{-ikx} + Be^{ikx}) \cdot (-i\hbar \frac{d}{dx} [Ae^{ikx} + Be^{-ikx}]) dx \\ &= -i\hbar \int (Ae^{-ikx} + Be^{ikx}) (ikAe^{ikx} - ikBe^{-ikx}) dx \\ &= \hbar k \int |A|^2 - AB e^{-i2kx} + AB e^{i2kx} - |B|^2 dx \\ &= \hbar k \int |A|^2 - |B|^2 + AB (e^{i2kx} - e^{-i2kx}) dx \\ &= \hbar k \int_{-l}^l (|A|^2 - |B|^2) + 2AB \cdot i \sin(2kx) dx \end{aligned}$$

integrale del sin $\int_{-l}^l \sin \phi$, la cost. è
la imp. l'ho in A e B

$$\langle p_x \rangle = \hbar k |A|^2 - \hbar k |B|^2$$

$\langle p_x \rangle$ non è più perfettamente det., con certe misure ottingo $\hbar k$, maltra $-\hbar k$. Dopo ∞ misure trovo il val. di aspettaz. $\langle p_x \rangle = \hbar k |A|^2 - \hbar k |B|^2$



- $\Psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ è autofunz. di \hat{k} , ma non di \hat{p}
- tuttavia Ae^{ikx} e Be^{-ikx} prese separatamente sono autofunz. sia di \hat{k} e \hat{p}

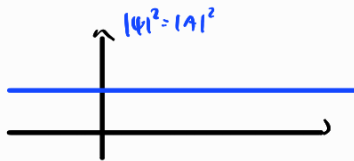
$$\frac{p^2}{2m} = k \Rightarrow p = \pm \sqrt{2km}$$

↳ se ho un componenti progressiva e regressiva non so quale segno prendere $\Rightarrow p$ non è più perf. determinato

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar/2$$

considero $\Psi = Ae^{ikx}$ ($\Delta p = 0$)

↳ mi ritrovo infatti $\Delta x \rightarrow \infty$:



la prob. di trovare la particella in una det. posiz. è distribuita equiprobabilmente sull'asse x, cioè la particella si potrebbe trovare in qualunque punto con la stessa prob.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx = ? \quad \text{l'onda piana } (Ae^{ikx}) \text{ non è normalizzabile}$$

mi consiglio dicendo che un domaino $(-\infty, +\infty)$ nella realtà \nexists

$\Rightarrow [-l, l]$ con l grande a piacere, ma non ∞

$$\Rightarrow \int_{-l}^l |A|^2 dx \Rightarrow |A| = \frac{1}{\sqrt{2l}}$$

$$J = \frac{\hbar}{2mi} \cdot \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) = \frac{\hbar}{2mi} \cdot \left\{ Ae^{-ikx} \cdot ikAe^{ikx} - Ae^{ikx} \cdot (-ikAe^{-ikx}) \right\}$$

$$= \frac{\hbar}{2mi} \left\{ ik|A|^2 + ik|A|^2 \right\}$$

$$= \frac{\hbar k}{m} |A|^2$$

$$| \dots | = \frac{p}{m} |A|^2$$

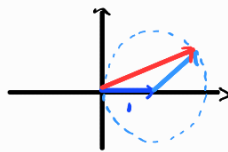
$$v_g |A|^2 \quad v_g = \frac{p}{m} \text{ velocità di gruppo}$$

considero un "pacchetto" di 2 armoniche:

$$\Psi(x,t) = e^{i(kx - \omega t)} + e^{i[(k+\Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t]}$$

$$= e^{i(kx - \omega t)} \cdot \left[1 + e^{i\Delta k(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t)} \right]$$

$$|\Psi|^2 \text{ dipende dal tempo: } \left| 1 + e^{i\Delta k(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t)} \right|^2$$



è max. quando $e^{i\Delta k(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t)} \parallel 1$

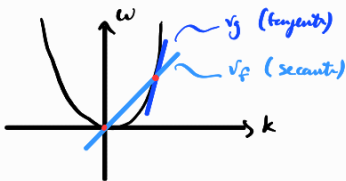
$$\Rightarrow \Delta k(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t) = 0 \Rightarrow x = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t \Rightarrow x = v_g t$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \text{ velocità di gruppo}$$

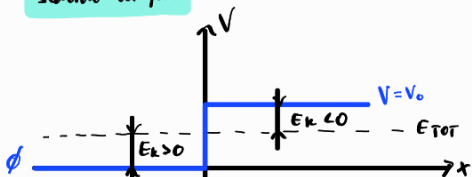
$$\omega = \frac{E}{\hbar} \Rightarrow \omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \text{ relaz. di dispersione}$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\Rightarrow v_g = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} \text{ giustifica la def. che avevamo trovato precedentemente: } J = v_g |A|^2$$



scatino di pot.



$E_k < 0$ classicamente non ha senso

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \quad \text{per } V=0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V_0\psi = E\psi \quad \text{per } V=V_0$$

$$E_{tot} = E_{pot} - E_k$$

onde viaggianti: considero $\psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ per $x < 0$

$$x > 0 \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \psi = \alpha^2 \psi \Rightarrow \psi(x) = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

α reale

non compare la i all'esp.
 diverge converge per $x \rightarrow \infty$
 \hookrightarrow non ha senso! \Rightarrow la toglio

(non ha senso un'onda regressiva/riflessa per $x > 0$)

critérii accettabilitá di ψ :

- (I) finita
- (II) deve essere una funz. \longrightarrow
- (III) continua
- (IV) derivata continua (seno il flusso potrebbe avere discontinuitá)

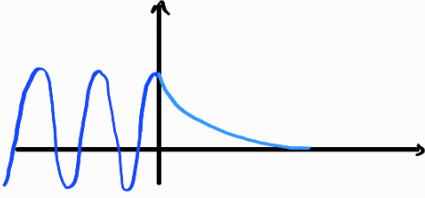


$$\Rightarrow \begin{cases} \psi(0^-) = \psi(0^+) \\ \frac{d\psi}{dx} \Big|_{0^-} = \frac{d\psi}{dx} \Big|_{0^+} \end{cases} \quad \begin{cases} A + B = D \\ i\hbar k A - i\hbar k B = -\alpha D \end{cases}$$

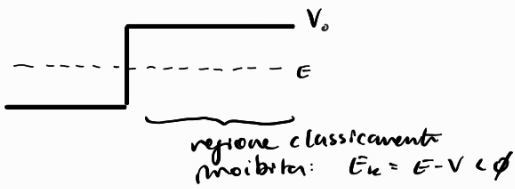
$$\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{k+ia}{2k} D \\ B = \frac{k-ia}{2k} D \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi(x) = D \frac{k+ia}{2k} e^{ikx} + D \frac{k-ia}{2k} e^{-ikx} & (x > 0) \text{ onde viaggiante} \\ \psi(x) = D e^{-\alpha x} & (x > 0) \text{ onde evanescente} \end{cases}$$

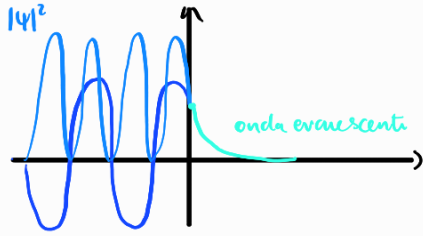
• D rimane indeterminato!



CASO $V_0 > E$



tuttavia per effetto tunnel:



$$x < 0: \psi(x) = \frac{k+ia}{2k} D e^{ikx} + \frac{k-ia}{2k} D e^{-ikx} \quad \text{onda viaggiante}$$

$\xrightarrow{\text{onda progressiva}} \quad \xleftarrow{\text{onda regressiva}}$

$$x > 0: \psi(x) = D e^{-\alpha x} = D e^{-\frac{1}{\lambda} x} \quad \text{onda evanescente}$$

$\text{Re}[\psi]$ (o $\text{Im}[\psi]$)

$$\Rightarrow j^+ = \frac{\hbar k}{m} \left| \frac{k+ia}{2k} D \right|^2 \rightarrow \text{flusso incidente}$$

$$\Rightarrow j^- = \frac{\hbar k}{m} \left| \frac{k-ia}{2k} D \right|^2 \leftarrow \text{flusso riflesso}$$

$$\frac{\hbar k}{m} \left| \frac{k+ia}{2k} D \right|^2 = \frac{\hbar k}{m} \left| \frac{k-ia}{2k} D \right|^2$$

$$\Rightarrow |k+ia|^2 = |k-ia|^2$$

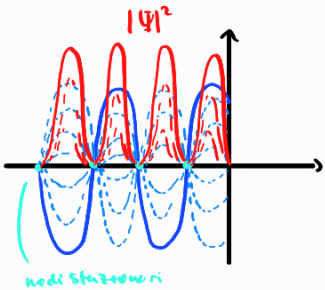
$$\Rightarrow \underbrace{k^2 + a^2}_{\text{Re}^2} = \underbrace{k^2 + a^2}_{\text{Im}^2} \quad \text{quindi effettivamente il flusso incidente = flusso riflesso}$$

$$\psi = \frac{k+ia}{2k} D e^{ikx} + \frac{k-ia}{2k} D e^{-ikx}$$

$$= \underbrace{\frac{D}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx})}_{\text{Re}[\psi]} + i \underbrace{\frac{D}{2k} (e^{ikx} - e^{-ikx})}_{\text{Im}[\psi]}$$

$$= D \cos(kx) - \frac{\hbar}{k} D \sin(kx)$$

$\hookrightarrow \psi$ è reale! Ed è anche staz. (combinaz. di seni e coseni)



$\Psi(x,t) = \psi(x) \cdot e^{-iEt/\hbar}$ è un'onda che oscilla nel tempo, ma non viaggia $\Rightarrow |\Psi|^2$ mi dà la probabilità

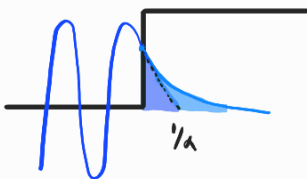
• nei max.: interf. costruttiva (tra onda progressiva e regressiva cioè tra onda incidente e riflessa)
 \hookrightarrow prob. max. di trovare la particella in quella pos.

• nei min.: interf. distruttiva
 \hookrightarrow prob. = 0

\Rightarrow la particella si sta comportando da onda

considero un'indeterminaz. nell'ordine di \hbar :

$$\Rightarrow \Delta p \cdot \Delta x = \hbar$$



vedo $1/\alpha$ come una indeterminaz. nella posiz.
 \hookrightarrow distingue due zone in cui è più o meno probabile trovare la particella

$$\Rightarrow \Delta p \cdot \frac{1}{\alpha} = \hbar \Rightarrow \Delta p = \alpha \cdot \hbar \quad \left(\alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta E_k = \frac{\Delta p^2}{2m} = V_0 - E \text{ indeterminaz. sull'energia cinetica}$$

$E_k = E - V_0$ classicamente era $\neq 0$ e quindi era impossibile trovare la particella nella zona $x > 0$. Tuttavia considero che E_k è afflitta da indeterminaz.: $E_k \pm \Delta E_k$ può essere ~ 0 quindi possiamo arrivare giusti (con velocità nulla in questo caso) nella zona $x > 0$

Caso $V_0 < E$

$$\Rightarrow \psi = e^{ikx} + R e^{-ikx} \quad (x < 0)$$

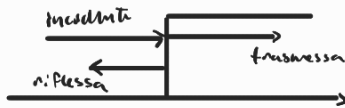
per $x > 0$: $-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + V_0 \psi = E \psi \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + (E - V_0) \psi = 0$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \psi}{dx^2} + k'^2 \psi = 0$$

La sol. è sempre un'onda viaggiante ma con vet. d'onda pari a k' (è cambiata E_k) $\Rightarrow k' = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$

$$\Rightarrow \psi = T e^{ik'x} + A e^{-ik'x} \Rightarrow \psi = T e^{ik'x}$$

non può esistere una onda "riflessa" regressiva nel secondo mezzo, non ha senso

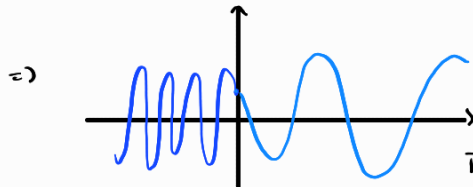


condiz. al contorno:

$$\begin{cases} 1 + R = T \\ ik - ikR = ik'T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + R = T \\ 1 - R = \frac{k'}{k} T \end{cases} \Rightarrow T = \frac{2k}{k + k'} = \frac{2k}{k + k'}$$

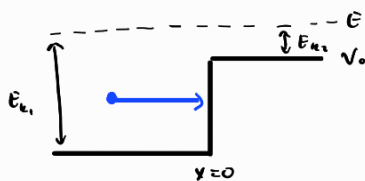
$$\Rightarrow \begin{cases} T = \frac{2k}{k + k'} \\ R = \frac{k - k'}{k + k'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R = T - 1 = \frac{2k}{k + k'} - 1 = \frac{2k - k - k'}{k + k'} = \frac{k - k'}{k + k'}$$



$R \in \mathbb{R}$, l'onda incidente e riflessa non hanno più lo stesso modulo \Rightarrow l'onda risultante non è puramente stazionaria

T potrebbe essere > 1
 \Rightarrow cambia λ e cambia il modulo



classicamente: la particella semplicemente oltrepassa la barriera con una nuova E_k minore

particella quantistica: si comporta da onda, può essere riflessa e trasmessa

$$J_i = \frac{\hbar k}{m}; J_r = \frac{\hbar k}{m} |R|^2; J_t = \frac{\hbar k'}{m} |T|^2$$

$$r = \frac{J_r}{J_i} = |R|^2 = \left(\frac{k - k'}{k + k'}\right)^2 \text{ prob. di riflessione}$$

$$t = \frac{J_t}{J_i} = |T|^2 = \frac{4kk'}{(k + k')^2} \text{ prob. di trasmissione}$$

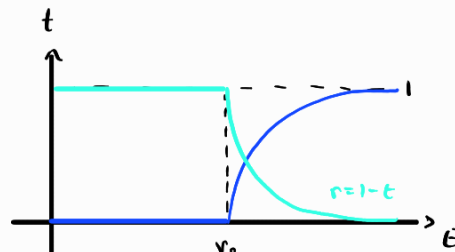
nota: r, R, t, T sono tutti riferiti a onde viaggianti. l'onda evanescente non è viaggiante, non è considerata in questi coeff.

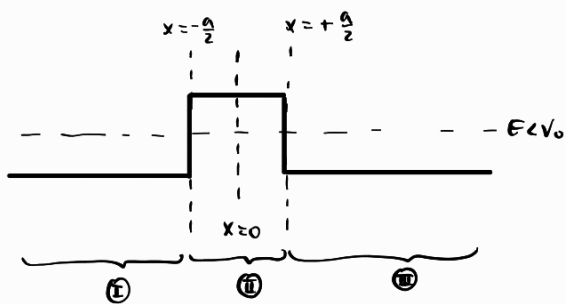
$r + t = 1$

risultato t :

$$t = \frac{4}{\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k} + 2} = \frac{4}{\sqrt{\frac{E}{E - V_0}} + \sqrt{\frac{E - V_0}{E}} + 2}$$

$$\begin{cases} k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ k' = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} \end{cases}$$





$$\text{I} \quad \psi = e^{ikx} + Re^{-ikx} \quad (k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar})$$

$$\text{II} \quad \psi = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} \quad (\alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar})$$

$$\text{III} \quad \psi = Te^{ikx} \quad (k = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{-ik\frac{a}{2}} + Re^{ik\frac{a}{2}} = Ae^{-\alpha\frac{a}{2}} + Be^{\alpha\frac{a}{2}} \quad (\text{continuità in } x = -\frac{a}{2}) \end{array} \right.$$

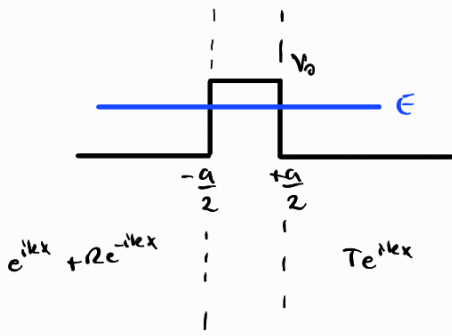
$$\left\{ \begin{array}{l} ik e^{-ik\frac{a}{2}} - ik R e^{ik\frac{a}{2}} = \alpha A e^{-\alpha\frac{a}{2}} - \alpha B e^{\alpha\frac{a}{2}} \quad (\text{continuità derivata in } x = -\frac{a}{2}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A e^{\alpha\frac{a}{2}} + B e^{-\alpha\frac{a}{2}} = T e^{ik\frac{a}{2}} \quad (\text{continuità in } x = \frac{a}{2}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha A e^{\alpha\frac{a}{2}} - \alpha B e^{-\alpha\frac{a}{2}} = ik T e^{ik\frac{a}{2}} \quad (\text{continuità derivata in } x = \frac{a}{2}) \end{array} \right.$$

risolvendo il sistema trovo:

$$T = \frac{-i 2k \frac{1}{\alpha} e^{-ika}}{(1 - \frac{k^2}{\alpha^2}) \text{sh}(\alpha a) - i 2k \frac{1}{\alpha} \text{ch}(\alpha a)}$$



$$T = \frac{-2i \frac{k}{\alpha} e^{-ik\alpha}}{\left(1 - \frac{k^2}{\alpha^2}\right) \text{sh}(\alpha a) - 2i \frac{k}{\alpha} \text{ch}(\alpha a)}$$

$$\text{con } \alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$J_i = \frac{\hbar k}{m}; \quad J_t = \frac{\hbar k}{m} |T|^2$$

$$\Rightarrow |T|^2 = \frac{4 \frac{k^2}{\alpha^2}}{\left(1 - \frac{k^2}{\alpha^2}\right)^2 \text{sh}^2(\alpha a) + 4 \frac{k^2}{\alpha^2} \text{ch}^2(\alpha a)} = \frac{1}{\frac{\left(1 - \frac{k^2}{\alpha^2}\right)^2 \text{sh}^2(\alpha a) + 1 + \text{sh}^2(\alpha a)}{4 \frac{k^2}{\alpha^2}}} = \frac{1}{\text{sh}^2(\alpha a) \left[\left(\frac{1 - \frac{k^2}{\alpha^2}}{2 \frac{k}{\alpha}}\right)^2 + 1\right] + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x &= 1 \\ \Rightarrow \text{ch}^2 x &= 1 + \text{sh}^2 x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |T|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{1 + \frac{k^2}{\alpha^2}}{2 \frac{k}{\alpha}}\right)^2 \text{sh}^2(\alpha a)}$$

$$\sim \left(\frac{4\alpha k}{k^2 + \alpha^2}\right)^2 e^{-2\alpha a} \sim e^{-2\alpha a} \ll 1 \text{ per } (\alpha a \gg 1)$$

$$\Rightarrow |T|^2 = e^{-2\alpha a}$$

per $\alpha a \gg 1$
(basta anche $\alpha a = 2, 3$)

per $\alpha a \gg 1$ e quindi $e^{-2\alpha a}$ avremo che $|T|^2$ (una prob.) è molto piccola. Trascureremo quindi il coeff. $\left(\frac{4\alpha k}{k^2 + \alpha^2}\right)^2$ perché alla fine mi basta sapere l'ordine di grandezza di $|T|^2$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 - \frac{k^2}{\alpha^2}}{2 \frac{k}{\alpha}}\right)^2 + 1 &= \frac{1 + \left(\frac{k^2}{\alpha^2}\right)^2 - 2 \frac{k^2}{\alpha^2} + 4 \frac{k^2}{\alpha^2}}{4 \frac{k^2}{\alpha^2}} \\ &= \frac{1 + \left(\frac{k^2}{\alpha^2}\right)^2 + 2 \frac{k^2}{\alpha^2}}{4 \frac{k^2}{\alpha^2}} = \left(\frac{1 + \frac{k^2}{\alpha^2}}{2 \frac{k}{\alpha}}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

se $x \gg 1$, il termine e^{-x} rispetto e^x è trascurabile

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + \left(\frac{k^2 + \alpha^2}{2 k \alpha}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} e^{-2\alpha a}}$$

↑ lo trasuro

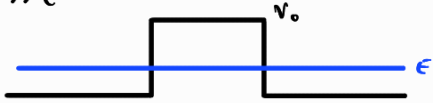
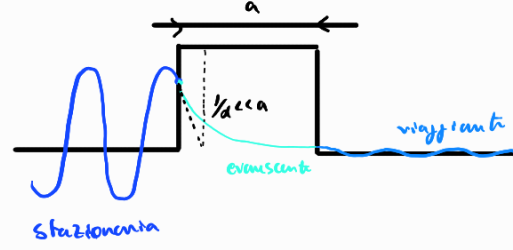
$\alpha a \gg 1 \Rightarrow a \gg 1/\alpha$

implica avere a grande

$\alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$

$\Rightarrow V_0 - E$ grande

$\Rightarrow V_0 \gg E$



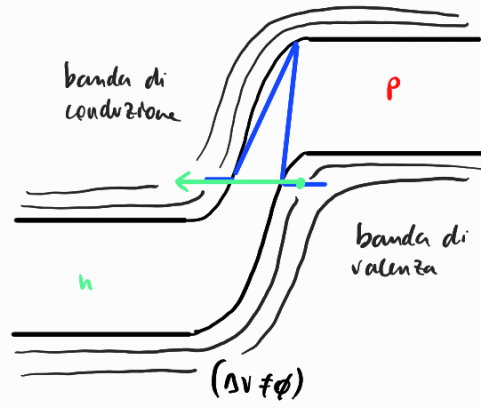
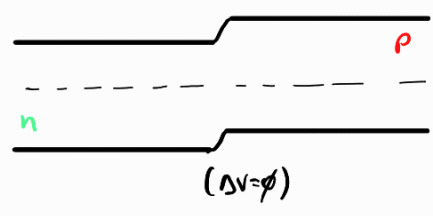
• cioè se l'energia della particella è $\ll V_0$, avrà poca prob. di avere un'onda viaggianti trasmessa, tradotto nel fatto che $1/a \ll \alpha$ cioè l'onda evanescente si attenua molto velocemente

$|T|^2 + |R|^2 = 1$

$|R|^2 = 1 - |T|^2 \sim 1$ per $\alpha a \gg 1$

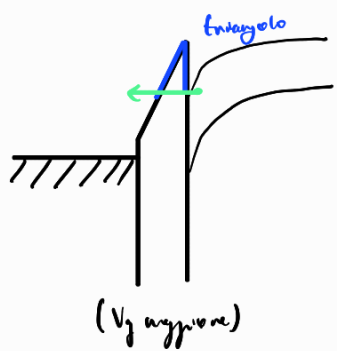
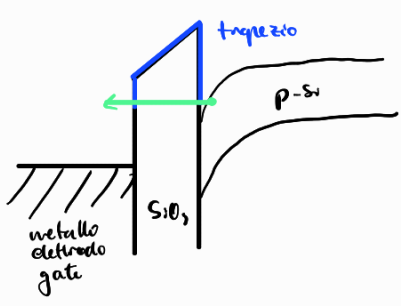
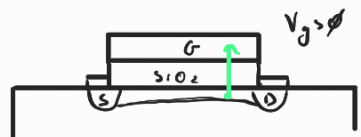
tunneling nei profili di potenziale generici:

giunzione np



• un elettrone che vuole fare tunneling da banda di valenza a banda di conduzione vede uno scabino di potenziale "triangolare"

MOSFET



• per via del tunneling avrò delle correnti di leakage all'elettrodo di gate \Rightarrow consumo potenza statica

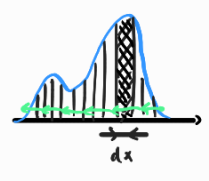
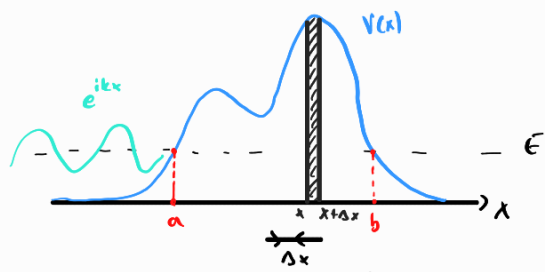
• voglio avere uno spessore maggiore di ossido per mitigare il tunneling. Tuttavia questo comporta che la capacità si riduce

\hookrightarrow si usa ossido high-k ($HfO_2, HfSiN$)
 $\epsilon_r = k \gg \epsilon_{SiO_2}$

$C = \epsilon \frac{A}{l}$ posso compensare la dim. di C dovuta all'inc. di l con una ϵ maggiore

• nel caso di profili di pot. del tipo $V(x) = A + Bx$ la sol. dell'eq. di Schrödinger è una funz. di $A \cdot \sin y$

approssimazione WKB (Wentzel-Brillouin-Kramers)

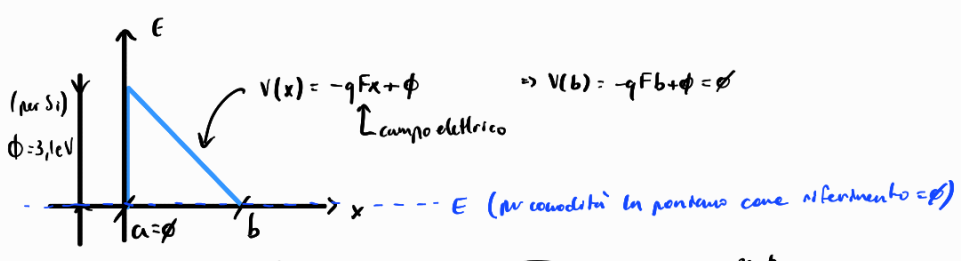


stiamo dicendo che la prob. che l'elettrone sia trasmesso da a → b è la prob. che oltrepassi tutti gli saltini di pot. di larghezza Δx

$$P(E) = \prod_n e^{-2\alpha_n \Delta x} = e^{-2 \sum_n \alpha_n \Delta x} \xrightarrow{\text{per } \Delta x \rightarrow dx} P(E) = e^{-2 \int_a^b \frac{\sqrt{2m(V(x)-E)}}{\hbar} dx}$$

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{2m(V(x)-E)}}{\hbar}$$

Caso triangolare

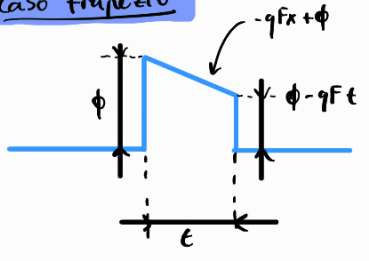


$$\Rightarrow P(E) = e^{-2 \int_0^b \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \cdot \sqrt{-qFx + \phi} dx} = e^{-\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \cdot \frac{1}{qF} \cdot \frac{2}{3} \cdot [(-qFx + \phi)^{3/2}]_0^b}$$

$$\Rightarrow P_{tri}(E) = e^{-\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar qF} \phi^{3/2}} \quad (\text{Fowler-Nordheim})$$

$(-qFb + \phi)^{3/2} - \phi^{3/2} = 0$

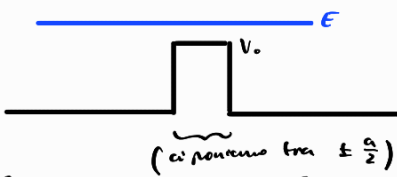
Caso trapezoido



$$\Rightarrow P_{trap}(E) = e^{-\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar qF} [\phi^{3/2} - (\phi - qFt)^{3/2}]}$$

caso $E > V_0$

per $E > V_0$:



$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$k' = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$$

(c'è interferenza tra $\pm \frac{a}{2}$)

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V_0 \psi = E \psi \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (V_0 - E) \psi = \rho$$

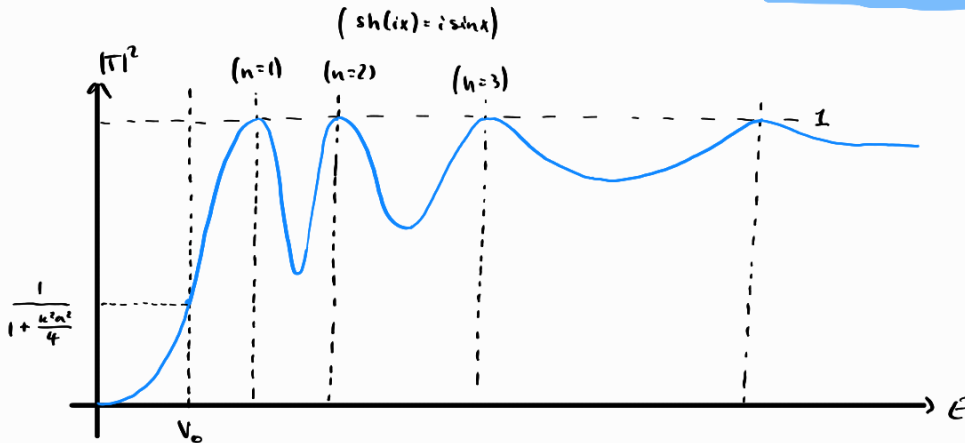
$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \rho + (V_0 - E) = \rho \Rightarrow \rho^2 = -\frac{(E - V_0) 2m}{\hbar^2} \Rightarrow \rho = \pm i \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} \Rightarrow \psi = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

nel caso $V_0 > E$ invece si aveva: $\psi = A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x}$

basta porre $k = ik'$ e "riciclano" i risultati già trovati precedentemente:

$$\Rightarrow |T|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{k^2 - k'^2}{2kk'}\right)^2 \cdot \text{sh}^2(ik'a)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{k^2 - k'^2}{2kk'}\right)^2 (\sin(k'a))^2} \Rightarrow |T|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{1 - \left(\frac{k'}{k}\right)^2}{2\frac{k'}{k}}\right)^2 \sin^2(k'a)}$$

k' è funz. di E , dunque $|T|^2$ è funz. di E



max. per $\sin^2(k'a) = 1$

$$\Rightarrow k'a = n\pi \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow k' = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} = \frac{n\pi}{a}$$

$$\Rightarrow E = V_0 + \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{a^2 \cdot 2m} \cdot \frac{1}{4} \quad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right)$$

$$= V_0 + n^2 \cdot \frac{h^2}{8ma^2}$$

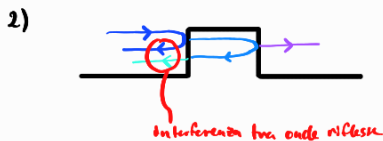
$\propto n^2$

per $E \rightarrow V_0 \Rightarrow k' \rightarrow 0 \Rightarrow \sin(k'a) \sim k'a \Rightarrow |T|^2 \sim \frac{1}{1 + \frac{k^2}{4k'^2} \cdot \frac{k'^2 a^2}{a^2}} = \frac{1}{1 + \frac{k^2 a^2}{4}}$

posso interpretare questi picchi dove $|T|^2 = 1$ in modi diversi:

1) $k' = \frac{2\pi}{\lambda'} = n \frac{\pi}{a} \Rightarrow a = n \frac{\lambda'}{2}$ risonanze dell'onda staz.
(cioè sono le freq. ammesse, i modi della corda vibrante)

\hookrightarrow la particella è in risonanza con la barriera



ho interferenza distruttiva tra le onde riflesse \Rightarrow non ho componenti regressive di onde riflesse
 \hookrightarrow viene trasmessa tutta ($|T|^2 = 1$)

$$\Psi(x,t) = \Psi(x) e^{-i\omega t} = \Psi(x) e^{-i \frac{E}{\hbar} t} \quad \text{stato stazionario}$$

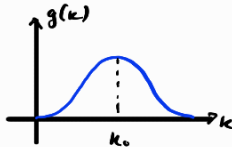
$$\Psi(x,t) = \sum a_n \underbrace{\Psi_n}_{e^{ikx}} e^{-i\omega t} \quad \text{stato non stazionario}$$

$$V \neq 0 \Rightarrow \Psi(x,t) = \int e^{i(kx - \omega t)} \cdot g(k) dk \quad \text{è una convoluzione}$$

↑
"a_n" è lo spettro
(trasf. di Fourier) della
funzione f(x).

più grande più stretta
(in coordinate)

consideriamo $g(k) = e^{-\frac{a}{\hbar^2}(k-k_0)^2}$ (Gaussiana)
(non è il k' di prima)



$$\Psi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ak'} \cdot e^{ik'x} \cdot dk' = e^{ik_0x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(k'-k_0)} \cdot e^{ik'(x-k_0)} dk' = e^{ik_0x} \cdot e^{i \frac{\hbar^2 x}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a \left[k'^2 - \frac{ik'x}{a} + \left(\frac{ix}{2a} \right)^2 \right]} dk'$$

(dk = dk')

sono e aggiungo $\left(\frac{ix}{2a}\right)^2$
all'esponente

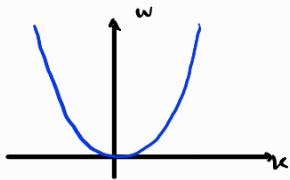
$$\Rightarrow \Psi(x,0) = e^{ik_0x} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(k' - \frac{ix}{2a})^2} dk' = e^{ik_0x} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{è una Gaussiana}$$

$\Rightarrow |\Psi(x,0)|^2$ è una Gaussiana: verifichiamolo

$$\Psi(x,t) = \Psi(x) e^{-i\omega t}$$

$$\Psi(x,t) = \int e^{-ak'^2} \cdot e^{i(k_0x - \omega t)} dk'$$

$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$ relaz. di dispersione quadratica (potrebbe essere anche di altro tipo)



$$\Rightarrow \omega(k) \sim \underbrace{\omega(k_0)}_{\omega_0} + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} \cdot (k-k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{k=k_0} \cdot (k-k_0)^2$$

$$\hookrightarrow \omega(k) = \omega_0 + v_g k' + \beta k'^2$$

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}$$

$$\left(\omega = \frac{E}{\hbar}, E = E(\omega) \right)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{k=k_0}$$

$$\Rightarrow \Psi(x,t) = \int e^{-ak'^2} \cdot e^{ik_0x} \cdot e^{ik_0t} \cdot e^{-i\omega_0 t} \cdot e^{-iv_g k' t} \cdot e^{-i\beta k'^2 t} \cdot dk'$$

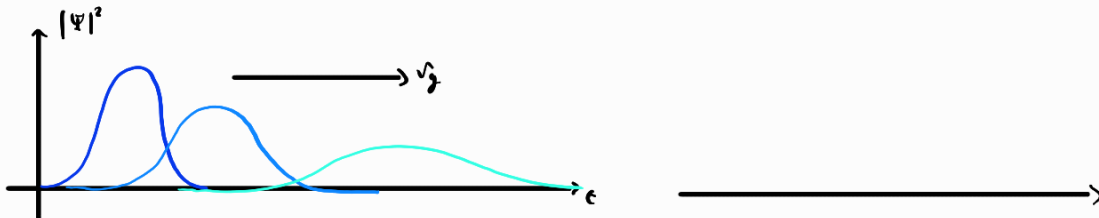
$$= e^{i(k_0x - \omega_0 t)} \cdot \int e^{-(a+i\beta t)k'^2} \cdot e^{ik'(x - v_g t)} dk'$$

$$\Rightarrow \Psi(x,t) = e^{i(k_0x - \omega_0 t)} \cdot e^{-\frac{(x - v_g t)^2}{4(a+i\beta t)}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a+i\beta t}}$$

effetto di dispersione
col tempo: si allarga
col tempo (in Gaussiana)

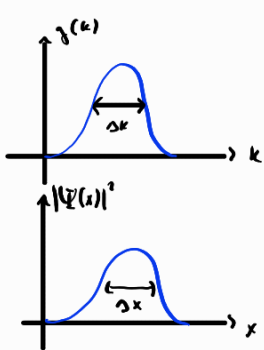
(uso il risultato già trovato
prima ponendo $x \leftarrow x - v_g t$,
 $a \leftarrow a + i\beta t$)

il max. della Gaussiana è in $x - v_g t = 0 \Rightarrow x = v_g t$ si muove



$$|\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^* = e^{-\frac{(x - v_g t)^2}{4(a+i\beta t)}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a+i\beta t}} \cdot e^{-\frac{(x - v_g t)^2}{4(a-i\beta t)}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a-i\beta t}}$$

$$= e^{-\frac{2(x - v_g t)^2}{4(a^2 + \beta^2 t^2)}} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{a^2 + \beta^2 t^2}} = e^{-\frac{(x - v_g t)^2}{2 \left(\frac{a^2 + \beta^2 t^2}{a} \right)}} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{a^2 + \beta^2 t^2}}$$



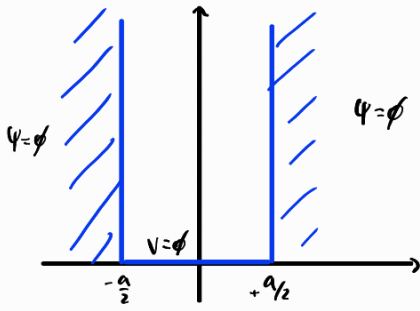
$$\Delta p = \hbar k \Rightarrow \Delta p = \hbar \Delta k$$

$$\Rightarrow \Delta p \cdot \Delta x = \hbar \cdot \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \cdot \sqrt{\alpha} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} = \sigma_x \cdot \sigma_k$$

↳ indifferenza del prodotto nel dom. spaziale vs. nel dominio delle k

• il fatto che compare $\sqrt{2}$ invece che 2 è dovuto al fatto che in realtà $\Delta x = 2\sigma_x$ e $\Delta k = 2\sigma_k$

buccia di potenziale a pareti ∞



- nella realtà non esiste
 - la particella è confinata nella buca \Rightarrow problema confinato
 - il tunneling non può avvenire in questi casi $\Rightarrow \psi = 0$ per $|x| > \frac{a}{2}$
 - \hookrightarrow le pareti riflettono totalmente le onde \Rightarrow dovremo avere onde stazionarie all'interno della buca
- $\Rightarrow \psi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' = E \psi$$

condit. al contorno: $\psi(\pm \frac{a}{2}) = 0$ per continuità

$$\begin{cases} \psi(-\frac{a}{2}) = 0 \Rightarrow A \cos(k \frac{a}{2}) - B \sin(k \frac{a}{2}) = 0 \\ \psi(+\frac{a}{2}) = 0 \Rightarrow A \cos(k \frac{a}{2}) + B \sin(k \frac{a}{2}) = 0 \end{cases}$$

chiamo $\cos(k \frac{a}{2}) = X$ e $\sin(k \frac{a}{2}) = Y$

$$\Rightarrow \begin{cases} Ax - By = 0 \\ Ax + By = 0 \end{cases} \Rightarrow 2By = 0 \Rightarrow B = 0$$

$\Rightarrow \psi(\frac{a}{2}) = A \cos(k \frac{a}{2}) = 0 \Rightarrow A \neq 0$ se no $\psi = 0$ sol. banale (la particella non c'è, non mi interessa)

$$\Rightarrow \cos(k \frac{a}{2}) = 0 \Leftrightarrow k \frac{a}{2} = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\hookrightarrow a = (2n+1) \frac{\lambda}{2} \quad n \in \mathbb{N} \text{ (è la soluta condizione di onde stazionarie, } a \text{ è n° dispari di semi lunghezze d'onda)}$$

questo era il primo caso per $A \neq 0, B = 0$. Vediamo il secondo caso $A = 0, B \neq 0$:

$$\Rightarrow \psi = B \sin(kx) \text{ } \underline{\text{dispari}}$$

$$\Rightarrow \sin(k \frac{a}{2}) = 0 \Leftrightarrow k \frac{a}{2} = n \pi \Rightarrow a = 2n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ (} a \text{ è un n° pari di semi lunghezze d'onda)}$$

\uparrow
caso banale

quindi abbiamo trovato le autofunz.

vediamo gli autovalori (E)

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad k = \frac{\pi}{a} (2n+1) \quad \vee \quad k = \frac{\pi}{a} 2n$$

le unisco in una unica condizione $\Rightarrow k = \frac{\pi}{a} n$

- $2n$ pari: ψ dispari
- $2n+1$ dispari: ψ pari

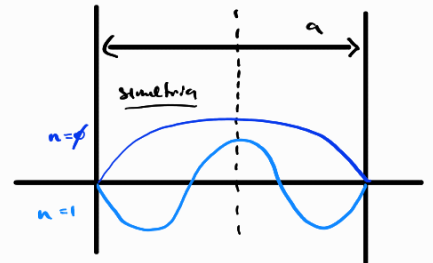
$$\Rightarrow E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \cdot \pi^2}{2m \cdot a^2} \cdot n^2 \Rightarrow E = \frac{\hbar^2}{8ma^2} \cdot n^2 \propto n^2 \quad n \in \mathbb{N}$$

\uparrow
n numero quantico

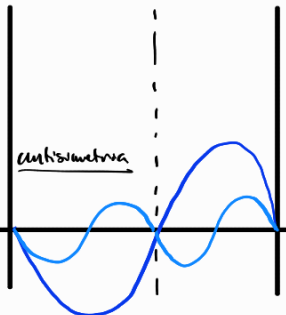
$$\begin{aligned} \psi_1 &= A_1 \cos(k_1 x) & n=1 & \text{primo stato fondamentale} \\ \psi_2 &= A_2 \sin(k_2 x) & n=2 & \text{secondo stato fondamentale} \\ & \vdots & & \end{aligned}$$

• $E \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ l'elettrone non può stare fermo (energia nulla)

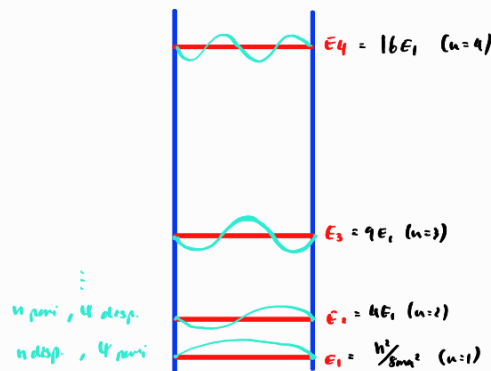
$\psi = A \cos(kx)$ funzione pari



(multippi)



$\psi = B \sin(kx)$ dispari



$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} A^2 \cos^2 kx dx = \frac{A^2}{k} \left[\frac{\cos(kx) \cdot \sin(kx) + kx}{2} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{A^2}{k} \cdot \frac{k a}{2} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

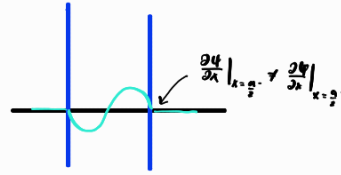
(supponiamo A reale)

↳ condizione di normalizzazione

(se consideravo Ψ dispari $\Rightarrow B = \sqrt{\frac{2}{a}}$)

↳ A è determinata nei problemi confinati

- osserviamo che la continuità della derivata non potrà mai essere valida:
- fattoria questo è correlabile col fatto che il potenziale è ∞ :

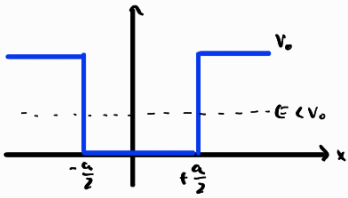


$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + V \Psi = E \Psi$$

$-\infty + \infty = \dots$

il motivo per cui non potremo avere pt. angolosi (cioè la derivata prima discontinua) è perché sono la derivata seconda nell'eq. di Schrödinger sarebbe stata ∞ . Ma se $V \rightarrow \infty$ questo è perfettamente coerente!

caso buca finita (quantum well)



per $|x| < \frac{a}{2}$ Ψ sarà sempre un'onda stazionaria, pari o dispari:

condizione di parità: $V(-x) = V(x)$ allora \Rightarrow

$$\begin{cases} \Psi(-x) = \Psi(x) \\ \Psi(-x) = -\Psi(x) \end{cases}$$

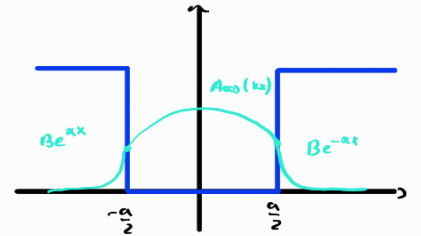
↑
ho un potenziale simmetrico

questo perché se il pot. è simmetrico $\Rightarrow |\Psi|^2$ è simmetrico (inoltre ha senso, le forze in gioco sono simmetriche, la d.d.p. di trovare la particella anche (o sarà). Ma allora $\Rightarrow |\Psi(-x)|^2 = |\Psi(x)|^2 \Rightarrow \Psi(x) = \pm \Psi(-x)$ quindi Ψ \begin{cases} pari \end{cases} \begin{cases} dispari \end{cases}

caso Ψ pari

$|x| < \frac{a}{2} \Rightarrow \Psi = A \cos(kx)$

↳ impongo le condiz. al contorno \Rightarrow continuità e continuità della derivata (non ho più $V \rightarrow \infty$)



$$\begin{cases} A \cos(k \frac{a}{2}) = B e^{-\alpha \frac{a}{2}} & \textcircled{1} \\ -k A \cdot \sin(k \frac{a}{2}) = -\alpha B e^{-\alpha \frac{a}{2}} & \textcircled{2} \end{cases}$$

(per simmetria mi basta vedere le condiz. in $\frac{a}{2}$ che saranno uguali a quelle in $-\frac{a}{2}$)

$\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} \Rightarrow -k \tan(k \frac{a}{2}) = -\alpha \Rightarrow \tan(k \frac{a}{2}) = \alpha/k$ risolvendo trovo k (e quindi E perché $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$) per il caso Ψ pari

caso Ψ dispari

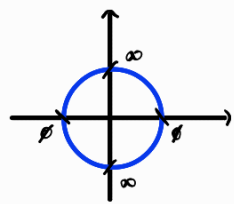
otteniamo in modo analogo $\Rightarrow \tan(k \frac{a}{2}) = -\frac{k}{\alpha}$ risolvendo trovo k (e quindi E) per Ψ dispari

fattoria questa eq. non sono risolvibili analiticamente. Risolviamo graficamente

$$\begin{cases} k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ \alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \end{cases} \Rightarrow \tan\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \cdot \frac{a}{2}\right) = \frac{\sqrt{V_0 - E}}{E} ; \tan\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \cdot \frac{a}{2}\right) = -\sqrt{\frac{E}{V_0 - E}}$$

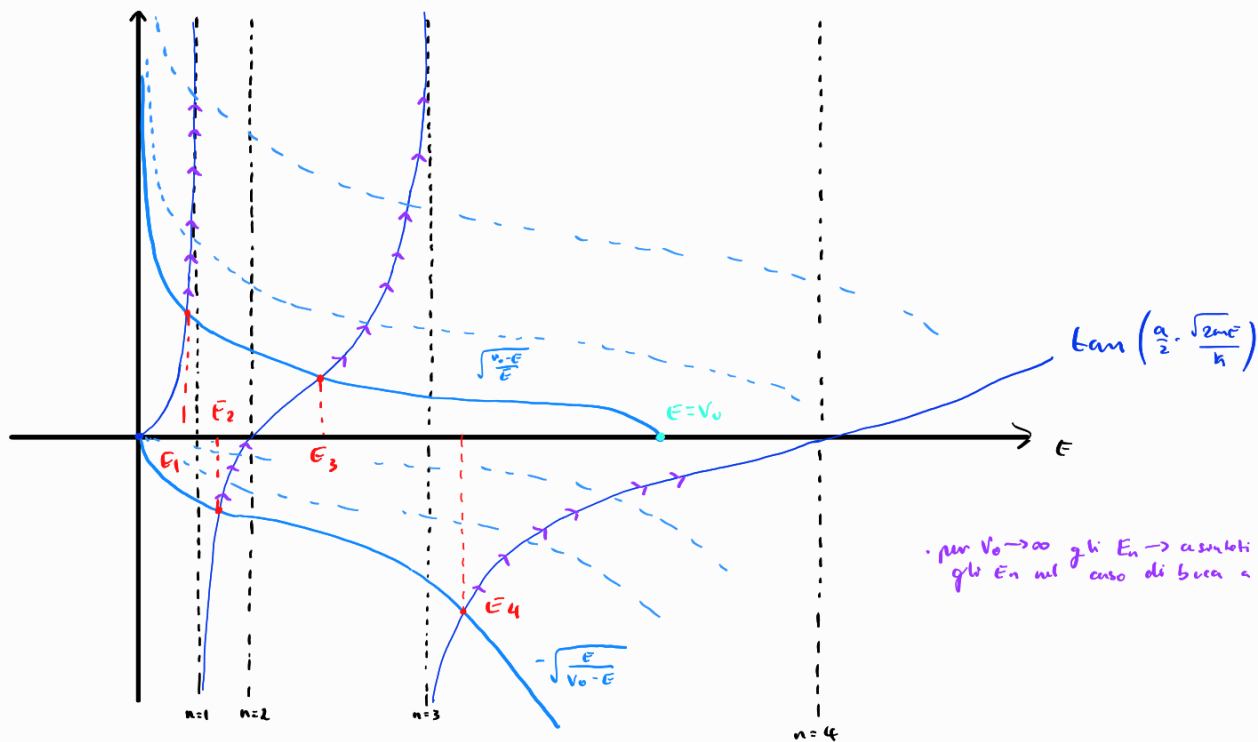
(Ψ pari) ; (Ψ dispari)

troviamo gli asintoti e zeri:



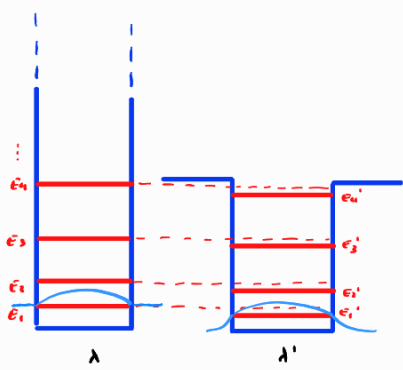
$$\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = n \frac{\pi}{2} \Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2}{8ma^2} \cdot n^2 \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

per n dispari ho gli asintoti,
per n pari ho gli zeri



per $V_0 \rightarrow \infty$ gli $E_n \rightarrow$ asintoti e zeri, e ritroviamo gli E_n nel caso di buca a prof. ∞

osserviamo che a diff. del caso di quantum nell a pareti ∞ , qui ho un numero limitato di E_n , imposto dal valore finito di V_0 .



• $\lambda' > \lambda$ perché ψ si raccorda con l'exp. dell'onda evanescente

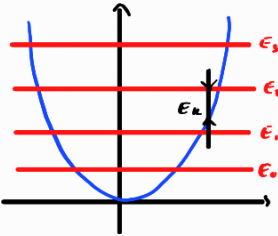
↳ a parità di n° quantico, i livelli energetici nel buco a parità finita sono ad energia minore

$$(E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2}, \text{ una } \lambda \text{ raddoppia corrisponde ad una energia minore})$$

oscillatore armonico

$$F = -\alpha x \Rightarrow V = \frac{1}{2} \alpha x^2$$

↑
cost-elastica



$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{1}{2} \alpha x^2 \psi = E \psi$$

$\omega = \sqrt{\alpha/m}$ freq. caratteristica / risonanza di una molla

$$u = x \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{\alpha m}{\hbar^2}}}_{\text{cost. di conversione}}$$

⇒ risolvendo si trova: $E_n = \hbar \omega (n + \frac{1}{2}) \propto n$, $n \in \mathbb{N} \rightarrow$ gli autoval. sono equidistanti

• le diverse forme del potenziale mi determinano diverse distribuzioni di autovalori

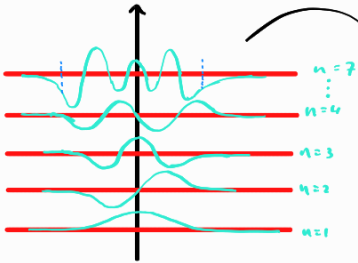
per questo riguardano le autofunzioni:

$$\begin{aligned} \psi_0(u) &= A_0 e^{-u^2/2} \\ \psi_1(u) &= A_1 u e^{-u^2/2} \\ \psi_2(u) &= A_2 (1-2u^2) e^{-u^2/2} \\ \psi_3(u) &= A_3 (3u-2u^3) e^{-u^2/2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

⇒ $\psi_n(u)$ = polinomio di Hermite

• noto che si alternano ψ pari e dispari, come d'altronde mi aspetta dato che V è simmetrico

• i coeff. si det. con la condiz. di normalizzazione.



• come un oscillatore classico l'elettrone oscilla tra i due "bordi", solo che può anche innestare con una certa probabilità oltre i bordi.

una meno che un oscillatore al "bordo" λ aumenta (bordo inteso come pt. di inversione del moto classico)

invece la E_n grande \Rightarrow λ piccolo in mezzo e più grande verso i bordi. Non solo ho λ più piccolo ma anche ampiezza minore (e quindi prob. minore)

↳ come in un pendolo classico, E_n è massima nel centro e quindi è lì che ho velocità max. (pensare al pendolo)

⇒ come nel pendolo, l'elettrone passa più tempo negli estremi di inversione di moto e quindi ha probabilità maggior di trovare lì l'elettrone

• i pt. di inversione di moto classico sono i classi

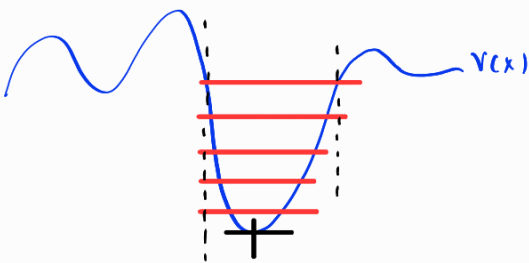
infatti \Rightarrow pt. di classe \Leftrightarrow derivata seconda nulla $\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V\psi = E\psi$

$$\Rightarrow V\psi = E\psi \Rightarrow \psi(V-E) = 0$$

$\psi = 0$ (nod. staz.)
 $V = E \Rightarrow E_k = 0$

$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda} \text{ perché } k \text{ è cost. possiede } \lambda \text{ cost.}$$

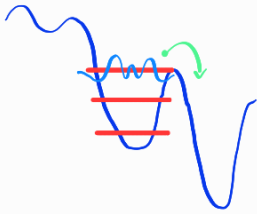
ma se $k \neq$ cost. difinisce il punto per punto (A non è più dritta come lunghezza d'onda a poco di una molla, viene la punta. non è prevedibile)



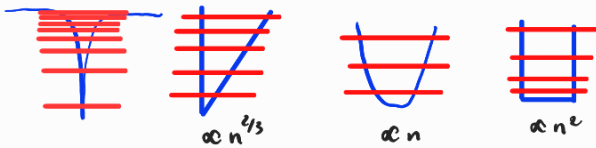
$$V(x) \sim V_0 + \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dx^2} x^2 \Rightarrow V(x) \sim V_0 + \frac{1}{2} k x^2$$

↳ approx. $V(x)$ (localmente ad un potenziale di un oscillatore armonico)

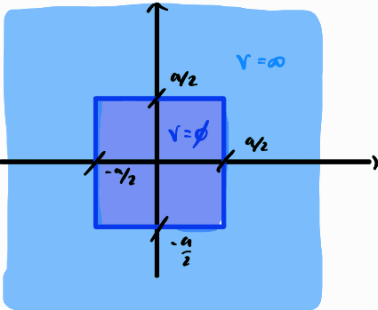
effetto di Franck-Condon



• quando aumenta l'energia non solo l'elettrone sale di livello energetico ma si sposta anche sempre più verso il fondo (come visto prima, l'elettrone tende a stare più sui bordi, e questo effetto è sempre più marcato all'aumentare dell'energia)



CASO V in 2D



$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi(x,y) = E \psi(x,y) \quad \text{per } (x,y) \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \times [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$$

$$\Rightarrow \psi(x,t) = \psi(x,y) \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$$

$$\Rightarrow \psi(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$

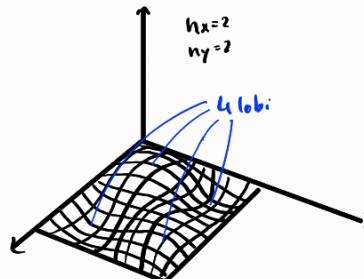
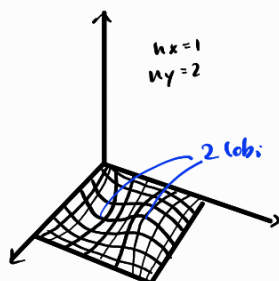
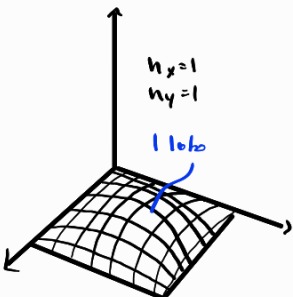
$$\Rightarrow \frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2 X(x)}{dx^2} Y + \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} X \right) = \frac{E X(x) \cdot Y(y)}{X(x) \cdot Y(y)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{X''}{X}}_{f(x)} - \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m} \frac{Y''}{Y}}_{g(y)} = E \cdot \text{cost.} \Leftrightarrow f(x), g(y) \text{ sono cost. (o se } V \text{ è a sua volta una somma di una } f(x) \text{ e } g(y) \text{ e.s. } V = \frac{1}{2} a(x^2 + y^2) \text{)}$$

pot. armonico bidim.

risolvendo trovo $\Rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{\hbar^2}{8ma^2} \cdot n_x^2 \\ E_y = \frac{\hbar^2}{8ma^2} \cdot n_y^2 \end{cases} \Rightarrow E = \frac{\hbar^2}{8ma^2} \cdot (n_x^2 + n_y^2)$

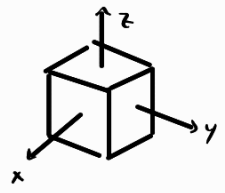
(le auto funz. invece saranno i soliti cos est'n)



n_x	n_y	n^2	E_n
1	1	2	$\frac{h^2}{2ma^2} \cdot 2$
1	2	5	$\frac{h^2}{2ma^2} \cdot 5$
2	2	8	$\frac{h^2}{2ma^2} \cdot 8$
1	3	10	...

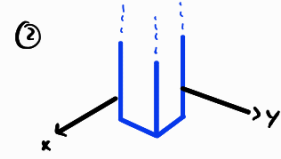
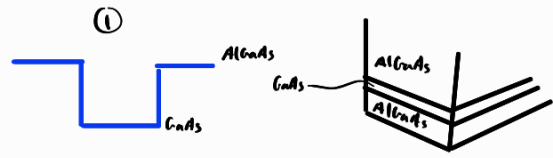
→ ho stati diversi con la stessa energia (tipo (1,2), (2,1)) ⇒ degenerazione

caso 3D

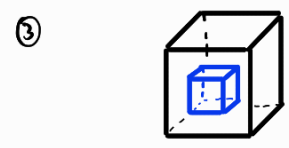
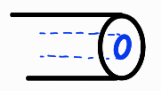


$\Psi = X(x)Y(y)Z(z)$
 ↳ avrà anche un n_z

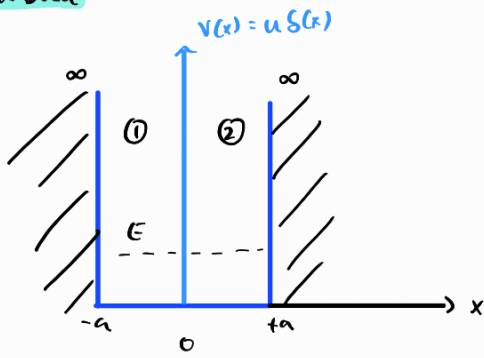
1D	quantum well ①
2D	quantum wire ②
3D	quantum dot ③



FINFET → passo successivo



Doppia buca



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

\Rightarrow in u è contenuta l'informazione della distanza tra le buche

① $\psi_1(x) = A_1 \cos(kx) + B_1 \sin(kx)$
 ② $\psi_2(x) = A_2 \cos(kx) + B_2 \sin(kx)$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

• il profilo di potenziale anche in questo caso è simmetrico $\Rightarrow \psi$ dovrà essere pari o dispari:

caso ψ pari

* continuità in $x=0 \Rightarrow \psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow A_1 = A_2 (=A)$

* parità $\Rightarrow \psi(-x) = \psi(x) \Rightarrow \psi_1(-x) = \psi_2(x) \Rightarrow A \cos(kx) - B_1 \sin(kx) = A \cos(kx) + B_2 \sin(kx)$

$\hookrightarrow (B_1 + B_2) \sin(kx) = 0 \Rightarrow B_1 = -B_2 (=B)$
 e se $\sin(kx) = 0$?

$$\Rightarrow \psi(x) = \begin{cases} \psi_1 = A \cos(kx) - B \sin(kx) & x > 0 \quad \text{①} \\ \psi_2 = A \cos(kx) + B \sin(kx) & x < 0 \quad \text{②} \end{cases}$$

• avendo un potenziale ∞ la derivata prima potrebbe essere discontinua

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + u \delta(x) \psi = E \psi \quad (\text{a intgro in un intorno di } 0 : [-\epsilon, +\epsilon])$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx + u \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) \psi dx = E \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi dx$$

facendo tendere $\epsilon \rightarrow 0$ e ottego: $-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx + u \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) \psi dx = E \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi dx$
 $+\epsilon \rightarrow 0$ da dx, $-\epsilon \rightarrow 0$ da dx, $\psi(\phi)$ per def., $=\phi$ (altro o un fattore nullo)

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_0^- + u \psi(0) = 0 \quad \text{condizione di discontinuità della derivata prima}$$

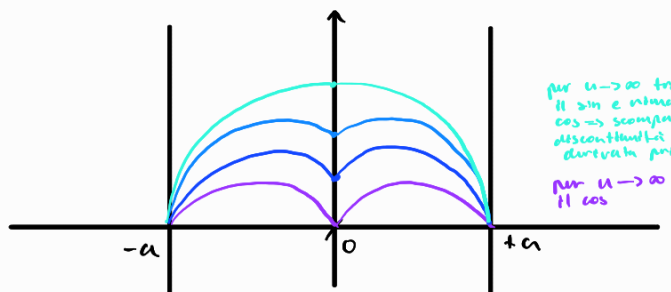
$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0^+} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0^-} \right\} = u \psi(0)$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ -Ak \sin(k0) + Bk \cos(k0) + Ak \sin(k0) + Bk \cos(k0) \right\} = u \psi(0)$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \cdot 2Bk = uA \Rightarrow A = \frac{\hbar^2 k}{2u} B$$

$$\Rightarrow \psi_{\text{pari}} = \begin{cases} \psi_1 = B \left(\frac{\hbar^2 k}{mu} \cos(kx) - \sin(kx) \right) & x < 0 \\ \psi_2 = B \left(\frac{\hbar^2 k}{mu} \cos(kx) + \sin(kx) \right) & x > 0 \end{cases}$$

(come sempre B si può ricavare dalla condit. di normalizzaz.)



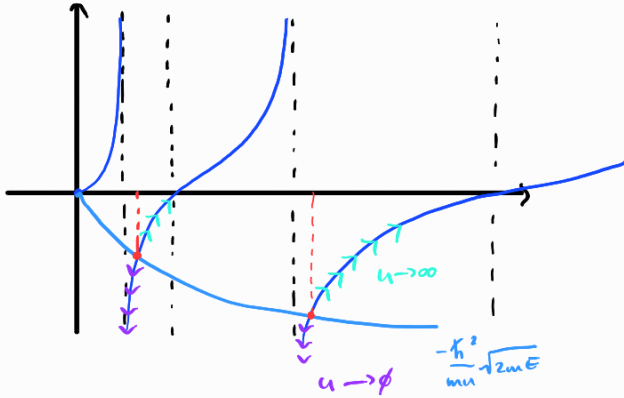
per $u \rightarrow \infty$ trascuro il sin e rimane il cos \rightarrow scompaie la discontinuità della derivata prima
 per $u \rightarrow \infty$ trascuro il cos

imponiamo il raccordo in $\pm a$ per trovare l'autovalore:

$$\Psi(\pm a) = \Psi(a) = \phi$$

$$\frac{\hbar k}{m u} \cos(ka) + \sin(ka) = \phi \Rightarrow \tan(ka) = -\frac{\hbar^2 k}{m u} \Rightarrow \tan\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} a\right) = -\frac{\hbar^2}{m u} \sqrt{2mE}$$

zeri e asintoti della tangente per: $\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} a = n \frac{\pi}{2} \Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2}{8m(2a)^2} \cdot n^2$ (ricorda il caso di buca di potenziale singola, ma con larghezza $2a$)
 n pari \Rightarrow zeri
 n dispari \Rightarrow asintoti



per $n \rightarrow \infty$ gli autoval. tendono a quelli di Ψ dispari (come vedremo successivamente)
 (autoval. \rightarrow zeri)

per $n \rightarrow \phi$ digiuno al caso di buca singola con larghezza $2a$ (anche questo lo vedremo dopo)
 (autoval. \rightarrow asintoti)

Caso Ψ dispari

* continuità: $A_1 = A_2$ ($=A$)

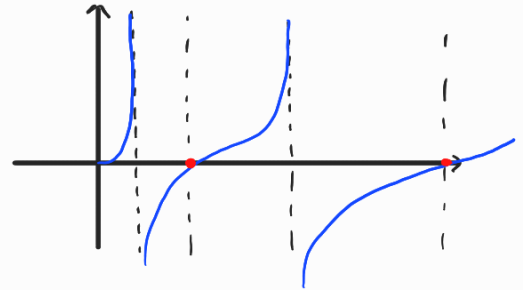
* discontinuità: $\Psi_1(-x) = -\Psi_2(x) \Rightarrow A \cos(kx) - B_1 \sin(kx) = -A \cos(kx) - B_2 \sin(kx)$

$$\hookrightarrow \text{uguaglio i coeff. di } \sin \text{ e di } \cos \Rightarrow \begin{cases} A = -A \Rightarrow A = \phi \\ -B_1 = -B_2 \Rightarrow B_1 = B_2 (=B) \end{cases}$$

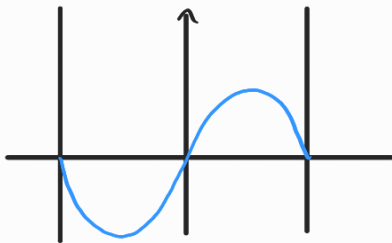
$\Rightarrow \Psi_{\text{dispari}} = B \sin(kx)$

impongo il raccordo:

$$\Psi(\pm a) = \phi \Rightarrow B \sin(ka) = \phi \text{ è equivalente a dire } \tan(ka) = \phi$$



gli autoval. sono gli zeri della tangente. Inoltre notiamo che non dipendono da u !!



come faccio a conciliare il fatto che ho un potenziale infinito in ϕ , ma non ho discontinuità nella derivata prima?

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} dx + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} u \Psi dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} E \Psi dx \Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0^+} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0^-} \text{ la derivata è continua come è giusto che sia}$$

• come già anticipato:

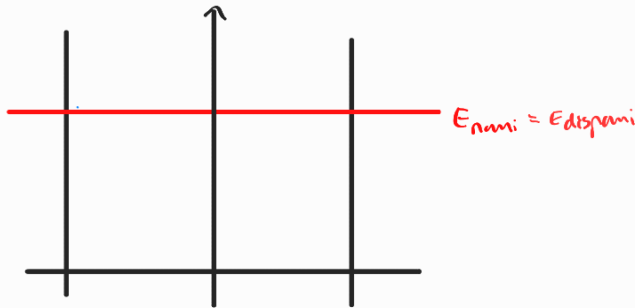
per $u \rightarrow \infty$ gli autoval. di Ψ_{pari} \rightarrow zero della tangente
autoval. di Ψ_{pari}

$$\Rightarrow \text{coe per } u \rightarrow \infty \text{ si ha } E_{\text{pari}} \rightarrow E_{\text{dispari}} = \begin{cases} \frac{h^2}{8m(2a)^2} \cdot n^2 & \text{per } n \text{ pari} \\ \frac{h^2}{8m(2a)^2} \cdot (2n)^2 & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

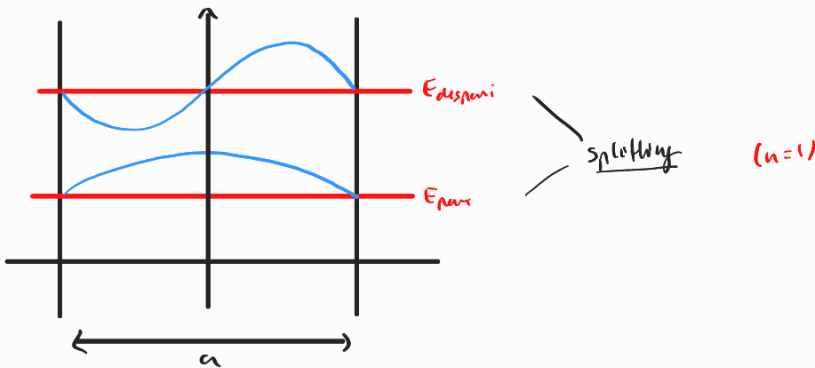
$$\Rightarrow E_{\text{pari}} = E_{\text{dispari}} = \frac{h^2}{8ma^2} n^2 \quad n \in \mathbb{N}, \text{ per } u \rightarrow \infty$$

\hookrightarrow sono gli autovalori della buca singola isolata di ampiezza u .
Le due buche diventano isolate e non interagiscono più

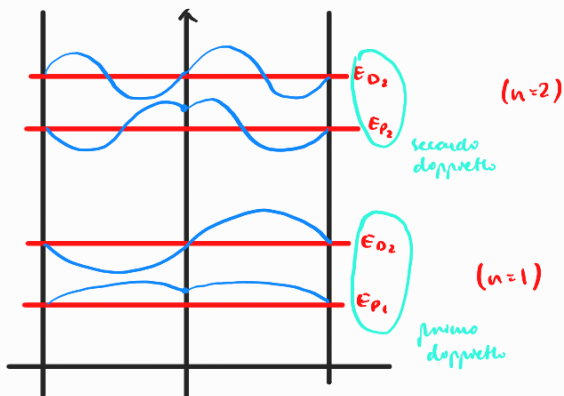
caso $u \rightarrow \infty$

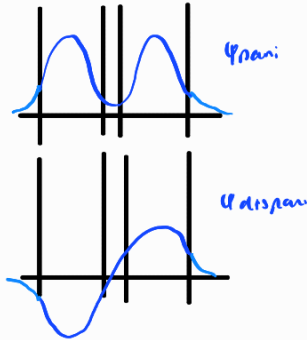
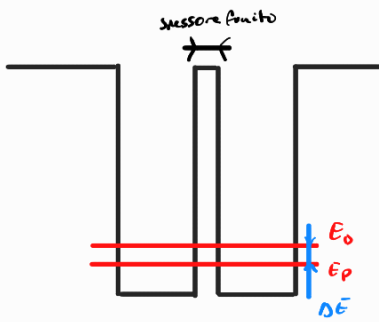
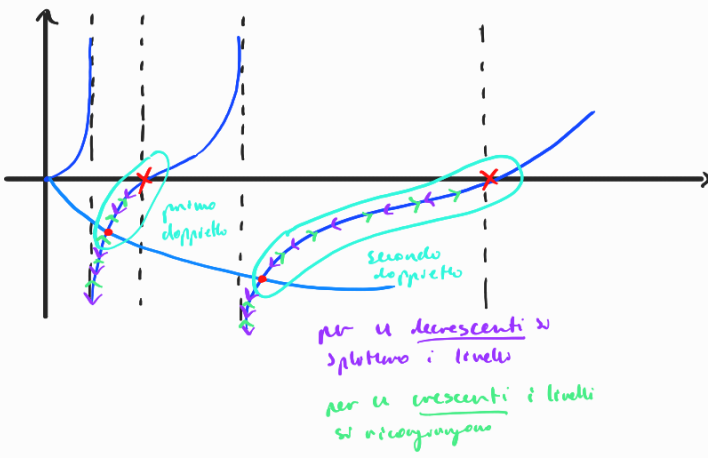


caso $u \rightarrow \emptyset$



nel caso di più n (u suff. piccolo per avere splitting ma non \emptyset)





ho anche le code evanescenti

$$\Rightarrow \Psi(x,t) = a_p \Psi_p e^{-i \frac{E_p}{\hbar} t} + a_0 \Psi_0 e^{-i \frac{E_0}{\hbar} t}$$

$$= e^{-i \frac{E_p}{\hbar} t} (a_p \Psi_p + a_0 \Psi_0 e^{-i \frac{E_0 - E_p}{\hbar} t})$$

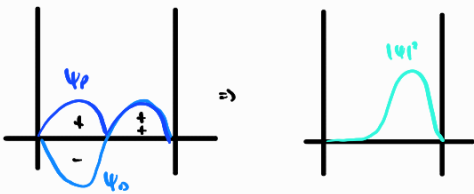
$$|\Psi|^2 = |a_p \Psi_p + a_0 \Psi_0 e^{-i \frac{\Delta E}{\hbar} t}|$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\Delta E}{\hbar}; \nu = \frac{\Delta E}{h} \Rightarrow T = \frac{h}{\Delta E}$$

$$\text{per } U \rightarrow \infty, \Delta E \rightarrow \emptyset \Rightarrow T \rightarrow \infty$$

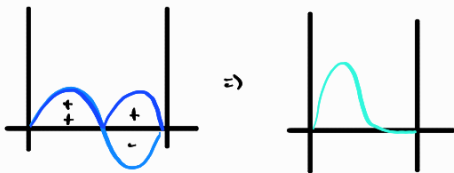
cioè l'elettrone sta in una buca e non ci va mai nell'altra

per $t = 0$



\Rightarrow per $t = 0$ è come se la particella fosse confinata tutta nella buca di destra

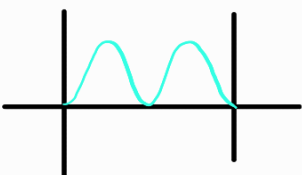
per $t = \frac{T}{2}$



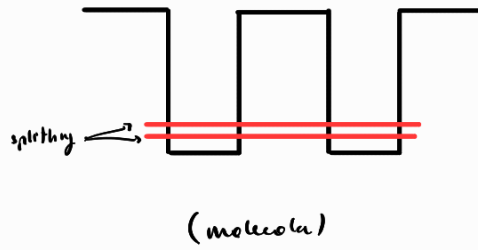
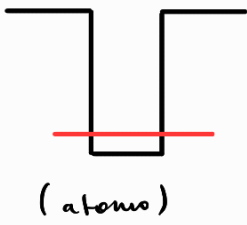
\Rightarrow a metà periodo si trova nell'altra

\hookrightarrow nel periodo l'elettrone passa da una buca all'altra \Rightarrow oscilla

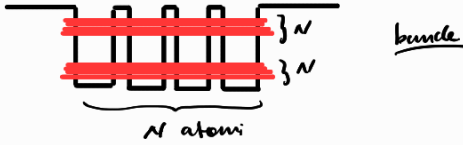
per $t = \frac{T}{4}, \frac{3T}{4}$



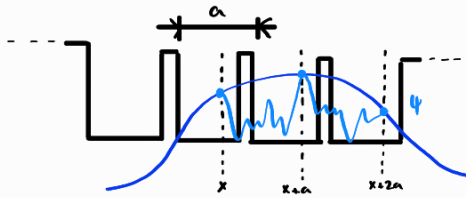
potenziali periodici



legame bonding: livello più
 legame anti-bonding: livello dispersi



teo. di Bloch



$V(x+a) = V(x)$ pot. periodico qualsiasi

(I) allora $\Rightarrow \Psi(x+a) = \Psi(x) e^{ika}$

(indipendentemente dal fatto che Ψ sia un'onda piana o meno)

involuppo e^{ika}
 (e.s. guardando la parte reale)

periodico almeno di un fattore

$|\Psi(x+a)|^2 = |\Psi(x)|^2$ è periodico! (Ha senso, se il pot. è periodico è ragionevole aspettarsi che lo sia anche la d.d.p. Altrimenti c'è un motivo per cui debba prediligere una buca rispetto l'altra)

(II) $\Psi_k(x) = \underbrace{u_k(x)}_{\text{funz. di Bloch}} \cdot \underbrace{e^{ikx}}_{\text{involuppo (onda piana)}}$

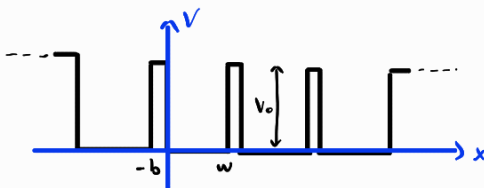
k descrive le autofunz. all'interno della banda
 \rightarrow da un "numero quantico" ai livelli all'interno della banda (però è un numero d'onda)

$u_k(x+a) = u_k(x)$

$\Rightarrow |u_k(x)|^2 = |u_k(x+a)|^2$

• l'enunciato (I) e (II) sono equivalenti $\Rightarrow \Psi(x+a) = u_k(x+a) e^{ik(x+a)} = u_k(x) \cdot e^{ikx} \cdot e^{ika} = \Psi(x) e^{ika}$

Modello Kronig-Penney



$a = b+w$

$\Psi_w = A_w \sinh(\alpha x) + B_w \cosh(\alpha x)$ $\alpha = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$

$\Psi_b = A_b \sin(\beta x) + B_b \cos(\beta x)$

se $E > V_0 \Rightarrow \beta_+ = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} \Rightarrow \beta = \beta_+$

se $E < V_0 \Rightarrow \beta_- = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} \Rightarrow \beta = i\beta_-$

$\begin{cases} \Psi_w(0) = \Psi_b(0) \\ \Psi_w'(0) = \Psi_b'(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_w = B_b \\ \alpha A_w = \beta B_b \end{cases}$

2 eq., ma le incognite \Rightarrow teo. di Bloch impone una condiz. di periodicità

$$\hookrightarrow \begin{cases} \Psi_w(w) = \Psi_b(-b) e^{ika} \\ \Psi_w'(w) = \Psi_b'(-b) e^{ika} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_w \sin(\alpha w) + B_w \cos(\alpha w) = (-A_b \sin(\beta b) + B_b \cos(\beta b)) e^{ika} \\ \alpha A_w \cos(\alpha w) - \alpha B_w \sin(\alpha w) = (\beta A_b \cos(\beta b) + \beta B_b \sin(\beta b)) e^{ika} \end{cases} \quad \text{moltiplico entrambi per } \beta$$

$$\begin{cases} B_w = B_b \\ \alpha A_w = \beta A_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta A_w \sin(\alpha w) + \beta B_w \cos(\alpha w) = (-\alpha A_b \sin(\beta b) + \beta B_b \cos(\beta b)) e^{ika} \\ \alpha A_w \cos(\alpha w) - \alpha B_w \sin(\alpha w) = (\alpha A_b \cos(\beta b) + \beta B_b \sin(\beta b)) e^{ika} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \beta \sin(\alpha w) + \alpha \sin(\beta b) e^{ika} & \beta \cos(\alpha w) - \beta \cos(\beta b) e^{ika} \\ \alpha \cos(\alpha w) - \alpha \cos(\beta b) e^{ika} & -\alpha \sin(\alpha w) - \beta \sin(\beta b) e^{ika} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_w \\ B_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pongo $\det = 0$ (ho una sola soluz.)

$$\begin{aligned} & -\alpha \beta \sin^2(\alpha w) - \beta^2 \sin(\alpha w) \sin(\beta b) e^{ika} - \alpha^2 \sin(\alpha w) \sin(\beta b) e^{ika} - \alpha \beta \sin^2(\beta b) e^{i2ka} \\ & = \\ & \alpha \beta \cos^2(\alpha w) - \alpha \beta \cos(\alpha w) \cos(\beta b) e^{ika} - \alpha \beta \cos(\alpha w) \cos(\beta b) e^{ika} + \alpha \beta \cos^2(\beta b) e^{i2ka} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \text{equazione} \\ \text{secolare} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \alpha \beta + \alpha \beta e^{i2ka} = 2\alpha \beta \cos(\alpha w) \cos(\beta b) e^{ika} - (\alpha^2 + \beta^2) \sin(\alpha w) \sin(\beta b) e^{ika} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{divido per } e^{ika}$$

$$\Rightarrow \alpha \beta \frac{(e^{-ika} + e^{ika})}{2 \cos(ka)} = 2\alpha \beta \cos(\alpha w) \cos(\beta b) - (\alpha^2 + \beta^2) \sin(\alpha w) \sin(\beta b)$$

$$\Rightarrow \cos(ka) = \cos(\alpha w) \cos(\beta b) - \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \sin(\alpha w) \sin(\beta b)}{2\alpha \beta} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{divido per } 2\alpha \beta$$

energia contenuta in α e β , e b e w invece contengono la geometria

$\hookrightarrow k$ è legata a questi parametri quindi in qualche modo descrive i livelli energetici

$$\begin{cases} \alpha_0 := \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} \\ \eta := \frac{E}{V_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha_0 \sqrt{\eta} \\ \beta_+ = \alpha_0 \sqrt{\eta - 1} \\ \beta_- = \alpha_0 \sqrt{1 - \eta} \end{cases}$$

Caso $E > V_0$

$$\Rightarrow \cos(ka) = \cos(\alpha_0 \sqrt{\eta}) \cos(\alpha_0 \sqrt{\eta-1}) - \frac{2\eta-1}{2\sqrt{\eta(\eta-1)}} \cdot \sin(\alpha_0 a \sqrt{\eta}) \cdot \sin(\alpha_0 b \sqrt{\eta-1}) = f_+(E)$$

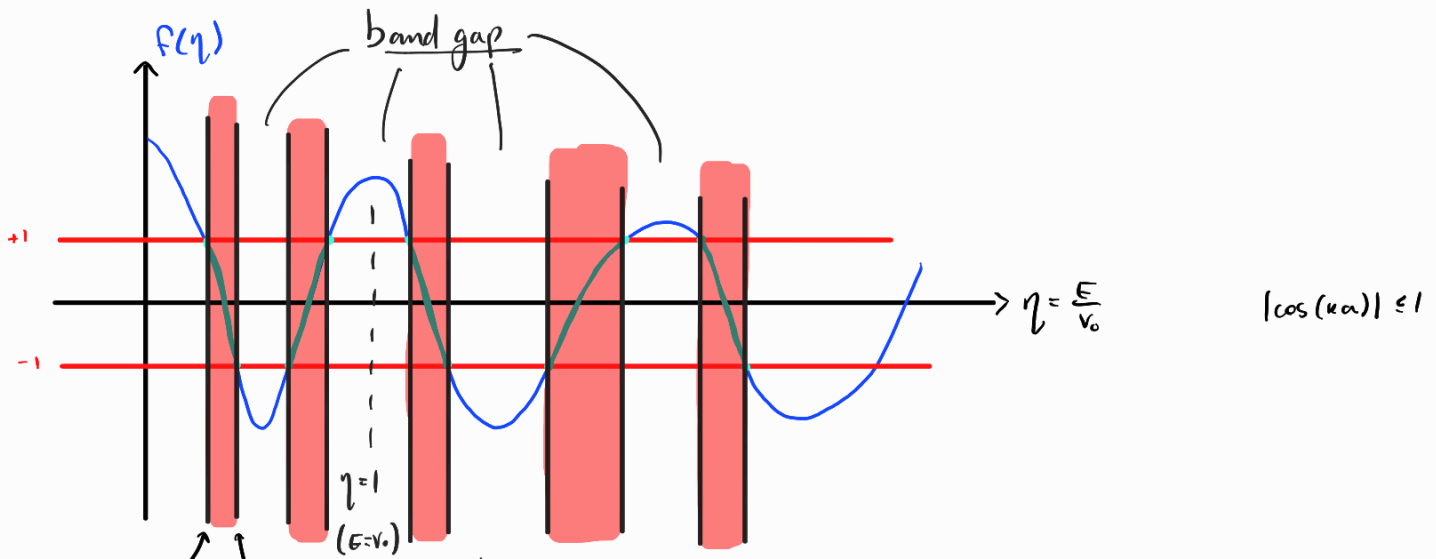
Caso $E < V_0$

$$\cos(ka) = \cos(\alpha_0 \sqrt{\eta}) \underbrace{\text{ch}(\alpha_0 \sqrt{\eta-1})}_{\left[\begin{array}{l} \beta = i\beta_- \\ \text{ma } \cos(ix) = \text{ch}(x) \end{array} \right]} - \frac{2\eta-1}{2\sqrt{\eta(1-\eta)}} \cdot \sin(\alpha_0 a \sqrt{\eta}) \underbrace{\text{sh}(\alpha_0 b \sqrt{\eta-1})}_{[\sin(ix) = i\text{sh}(x)]} = f_-(E)$$

$$\Rightarrow \cos(ka) = \cos(\alpha_0 \sqrt{\eta}) \text{ch}(\alpha_0 \sqrt{\eta-1}) - \frac{2\eta-1}{2\sqrt{\eta(1-\eta)}} \cdot \sin(\alpha_0 a \sqrt{\eta}) \text{sh}(\alpha_0 b \sqrt{\eta-1}) = f_-(E)$$

$f_+(V_0) = f_-(V_0)$

$\cos(ka) = f(E) \Rightarrow |\cos(ka)| \leq 1 \Rightarrow |f(E)| \leq 1 \Rightarrow$ l'eq. ammette sol. solo in certe regioni!



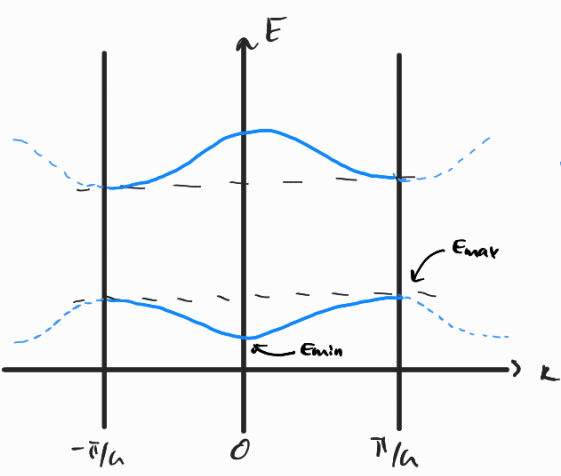
$\eta_{\min} \downarrow E_{\min}$
 $(\cos(ka) = +1)$

$\eta_{\max} \downarrow E_{\max}$
 $(\cos(ka) = -1)$

no zone proibite e bande anche per $E > V_0$

$E > V_0$
 bande nascono da una interferenza distruttiva e costruttiva \Rightarrow weak banding

$E < V_0$
 \Rightarrow tight banding (dovuto allo splitting)

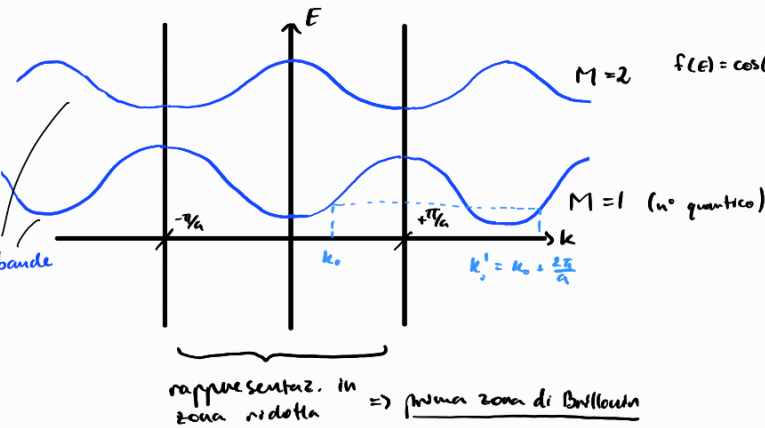


$$\cos(ka) = +1 \Rightarrow ka = 0 \pm n2\pi \Rightarrow k = 0 \pm n \frac{2\pi}{a}$$

$$\cos(ka) = -1 \Rightarrow ka = \pm\pi \pm n2\pi \Rightarrow k = \pm \frac{\pi}{a} \pm n \frac{2\pi}{a}$$

$\Psi_k(x) = u_k(x) e^{ikx} \Rightarrow$ In ogni periodo mi muovo la stessa cosa funzione un sfasato. Posso anche immaginare che l'elettrone sia "libero" nel cristallo, e farlo di considerare $u_k(x) \sim \cos(x)$.

$u_k(x+a) = u_k(x)$



$f(E) = \cos(ka) \Rightarrow k = \frac{1}{a} (\arccos(f) + n2\pi)$

$k' = k + n \frac{2\pi}{a}$ $\forall k$ corrisponde una E_k e Ψ_k

$\bullet k_0$ e k_0' rappresentano la stessa energia \Rightarrow stessa autoval.

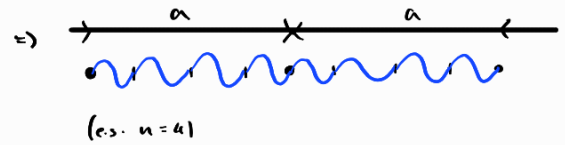
\hookrightarrow le altre zone di Brillouin non mi danno nuove info su autoval. / autofunz.

$\Rightarrow \begin{cases} \Psi_{k'} = u_{k'} e^{ik'x} \\ \Psi_k = u_k e^{ikx} \end{cases} \leftarrow \text{coincidono}$

$u_{k'} e^{ik'x} = u_{k'} e^{ikx} \cdot e^{in \frac{2\pi}{a} x} = u_k e^{ikx} \Rightarrow u_{k'} = u_k e^{-in \frac{2\pi}{a} x}$
 $\left[\Psi_{k'} = \Psi_k \right]$
 u_k periodica
 onda piana periodica

chiamo $g = n \frac{2\pi}{a} \Rightarrow \lambda_g = \frac{2\pi}{g} = \frac{a}{n}$

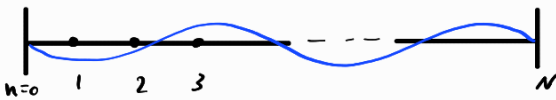
\hookrightarrow è un'onda piana che ha λ sottomultiplo del passo del reticolo



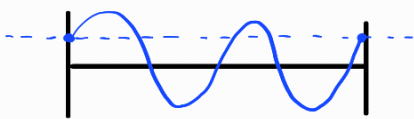
$\Rightarrow \begin{cases} u_k \text{ periodica} \\ e^{-igx} \text{ periodica} \end{cases} \Rightarrow$ in posso mettere in qualunque zona di Brillouin, basta aggiustare u_k adeguatamente

condiz. al contorno

① considero un cristallo finito \Rightarrow condiz. di annullamento agli estremi $\Rightarrow \begin{cases} \Psi_k(0) = 0 \\ \Psi_k(Na) = 0 \end{cases}$



② condiz. periodiche al contorno \Rightarrow imponendo la periodicità $\Rightarrow \Psi_k(0) = \Psi_k(Na)$

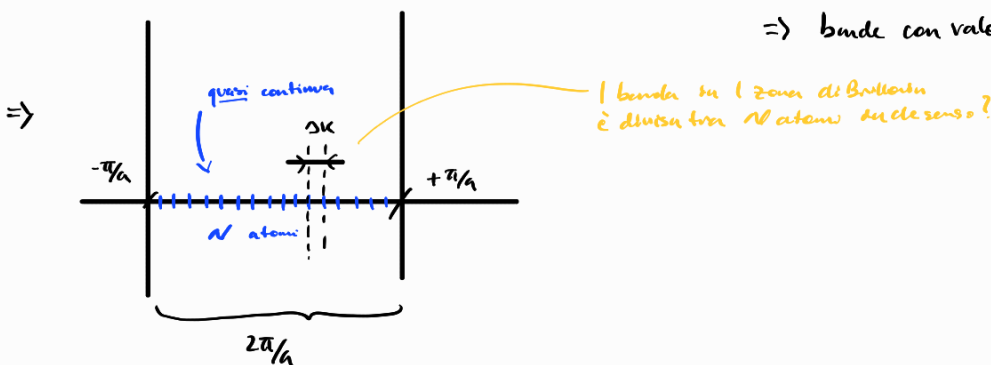


- la ① è un caso più specifico della ② ($\Psi_k(0) = \Psi_k(Na) = 0$) e quindi più forzata \Rightarrow è più comodo trattare la ②
- è più una condiz. matematica che fisica. È come se l'elettrone esce da un estremo e rientra dall'altro

$\Psi_k(0) = \Psi_k(Na) \Rightarrow u_k(0) \cdot e^0 = u_k(Na) e^{ikNa} \Rightarrow kNa = n2\pi \Rightarrow k = \frac{2\pi}{a} \cdot \frac{n}{N}$
 $(u_k(0) = u_k(Na); u_k \text{ è periodica})$
 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{N}{2}$
 $(k \in [-\frac{\pi}{a}; +\frac{\pi}{a}] \text{ prima zona Brillouin})$

$\Delta k = k_{n+1} - k_n = \frac{2\pi}{a}$

\Rightarrow bande con valori ammessi di k discreti



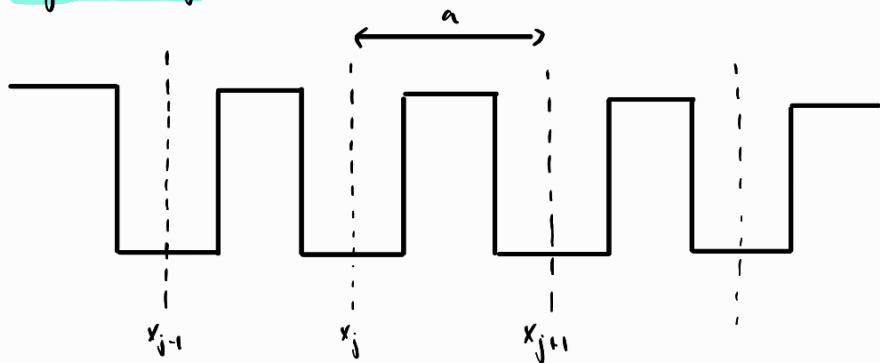
due approx. possibili:

* tight binding \Rightarrow vede l'elettrone come legato all'atomo

* weak binding \Rightarrow elettrone come slegato e entra nel cristallo e ci interferisce

\Rightarrow entrambi arrivano ad una descriz. simile della banda

tight binding

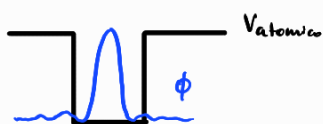


$$\Rightarrow H = \frac{-\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2}{dx^2} + V_c$$

\uparrow pot. periodico

$$\Rightarrow H\psi_k = E_k \psi_k$$

• considero un singolo atomo all'oo:



$$\Rightarrow H = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_{\text{atomo}}$$

potenziale del singolo atomo

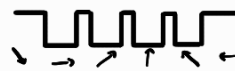
$$\Rightarrow H\phi = E_{\text{at}} \phi$$

$$\Rightarrow \psi_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j c_j \phi(x-x_j)$$

è una sorta di normalizzata.

teo di tight binding: considero il cristallo come sovrapp. lin. di tanti potenziali atomici

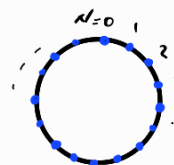
$c_j = e^{ikx_j} \Rightarrow$ è un'oscillazione che ruota in modo elicoidale lungo il reticolo



$$\psi_k(x+a) = \psi_k(x) e^{ika} \quad (\text{teo. di Bloch})$$

$$\Rightarrow \psi_k(x+a) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{ikx_j} \phi(x-x_j+a) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{ik(x_j-a)} \cdot \phi(x-(x_j-a)) e^{ika} = \psi_k(x) e^{ika}$$

è come se stessi contando partendo però con uno shift a sx dell'indice j



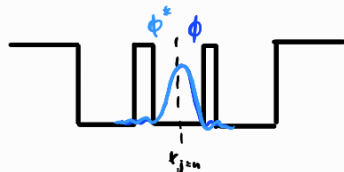
il punto di partenza del conteggio degli atomi è indifferente per via della periodicità agli estremi

quindi giustifica $c_j = e^{ikx_j}$

$$\langle E_k \rangle = \int \psi_k^* \hat{H} \psi_k dx = \int \psi_k^* \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_c \right) \psi_k dx = \frac{1}{N} \sum_{j,n} e^{-ik(x_j-x_n)} \cdot \int \phi^*(x-x_j) \hat{H} \phi(x-x_n) dx$$

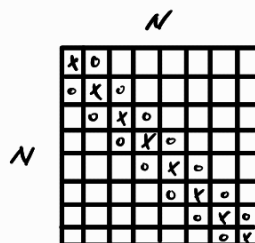
$c_j = c_n$
 \uparrow
 doppia sommatoria (ho sia ψ_k che ψ_k^*)

* $j=n$ diagonale

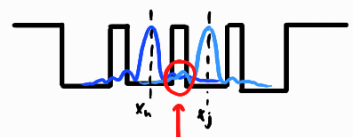


$$\Rightarrow \langle E_k \rangle = \int \phi^*(x-x_j) \hat{H} \phi(x-x_n) dx = E_{\text{atomo}}$$

approx. \hat{H} a \hat{H}_{atomo} (cioè $V_c = V_{\text{atomo}}$) perché ϕ^* e ϕ sono in una stessa singola buca



* $j = n \pm 1$ primi vicini



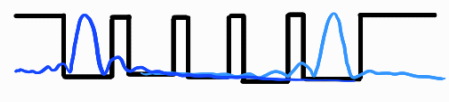
$\Rightarrow \int \phi^*(x-x_j) \hat{t} \phi(x-x_n) = -\beta$

β : integrale di scambio

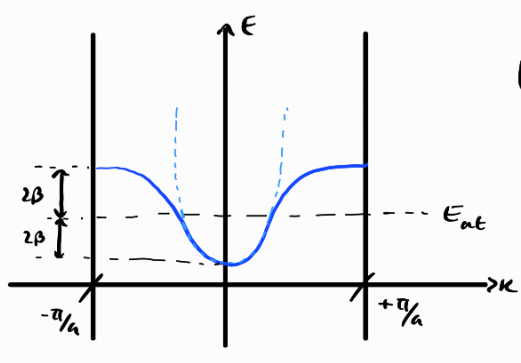
la sovrapp. tra ϕ e ϕ^* è significativa solo dove si sovrappongono le due "code"
 \hookrightarrow l'inf. sarà max. nella bozza

• meno sono evanescenti le code (cioè ho più tunneling, più è grande β e viceversa)

* per $j = n \pm 2, n \pm 3, \dots$, la sovrapp. non è significativa
 \hookrightarrow li trascuro



$\Rightarrow \langle E_k \rangle = \frac{1}{N} \left[\underbrace{N \cdot E_{at}}_{j=n} + \underbrace{(-\beta) \cdot N \cdot e^{ika}}_{j=n+1} + \underbrace{(-\beta) N e^{-ika}}_{j=n-1} \right] \Rightarrow \langle E_k \rangle = E_{at} - 2\beta \cos(ka)$

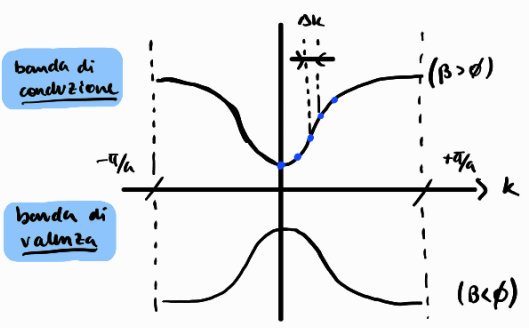


$(\beta \leq 0)$

• nell'intorno del minimo (o massimo) possiamo fare una appross. parabolica

$\Rightarrow E(k) \sim E|_{min} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 E}{dk^2} \right|_{min} \cdot k^2 = E_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \Rightarrow$ descrivono l'elettrone come libero! (è una notevole sempl. fracc.)
 (con un po' di fantasia) relaz. di dispersione per una particella libera

$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{m^*} = \frac{d^2 E}{dk^2} \Rightarrow m^* = \frac{\hbar^2}{\left. \frac{d^2 E}{dk^2} \right|_{min}}$



$$E(k) = E_0 - 2\beta \cos(ka)$$

$$k = \frac{2\pi}{a} \cdot \frac{n}{N} \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{N}{2}$$

$$\Delta k = \frac{2\pi}{a} / N$$

$$\psi_k = u_k e^{ikx}$$

$$\Psi_k = \psi_k e^{-i\omega t} = \psi_k e^{-i\frac{E}{\hbar} t}$$

approssimaz. semi classica

$$v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} = \frac{dw}{dk} \quad \text{velocità di gruppo}$$

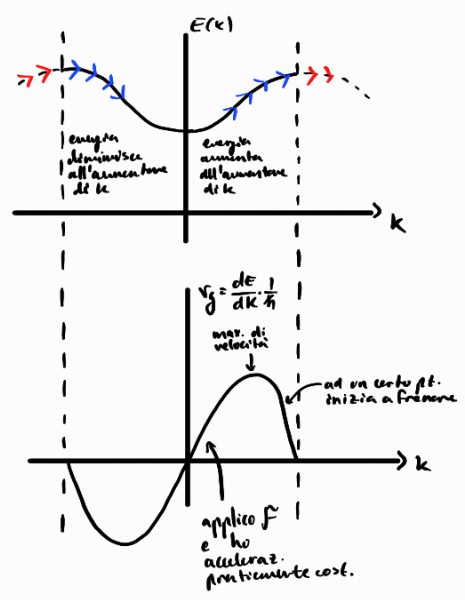
$$F = \text{forza} = -qF \quad \text{campo elettrico}$$

$$F dx = dE \Rightarrow F \frac{dx}{dt} = \frac{dE}{dt} \Rightarrow F v_g = \frac{F}{\hbar} \frac{dE}{dk} = \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dk} \frac{dk}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{F}{\hbar} \cdot \frac{dE}{dk} = \frac{dE}{dk} \cdot \frac{dk}{dt} \Rightarrow F = \hbar \frac{dk}{dt}$$

applicare una forza all'elettrone si riflette su una var. del k nel tempo \Rightarrow l'elettrone si muove nella banda

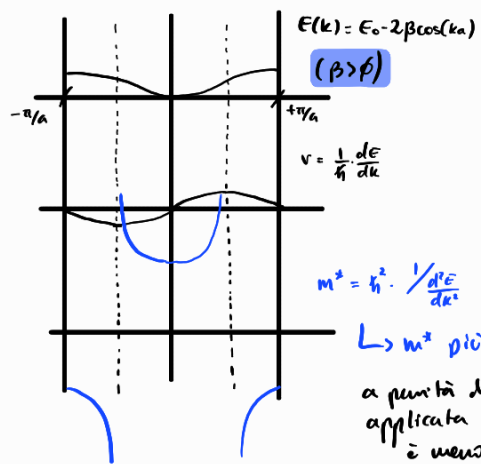
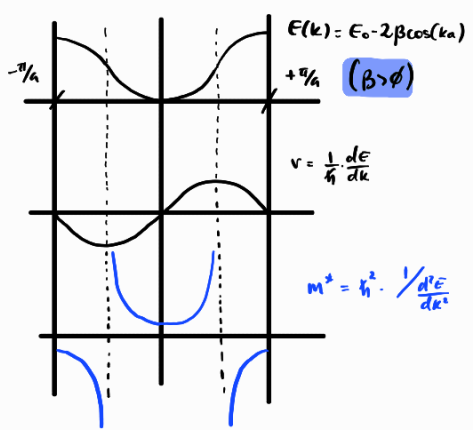
• cambiando k cambia l'energia: potrebbe aumentare, come anche diminuire, ma non è così bizzoso come potrebbe sembrare inizialmente. Questo succede perché l'elettrone è soggetto a forze maggiori che sono quelle che risente dal fatto che sta in un cristallo, cosa già tenuta in conto in quanto nell'eq. di Schrödinger compare il potenziale V.



$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} \right] = \frac{1}{\hbar} \frac{d^2E}{dk^2} \frac{dk}{dt} \Rightarrow a = \frac{F}{\hbar^2} \left(\frac{d^2E}{dk^2} \right) \frac{1}{m^*}$$

$$\Rightarrow a = \frac{F}{m^*} \quad \text{con} \quad m^* = \frac{1}{d^2E/dk^2}$$

coincide con quanto già ottenuto con l'approx. parabolica



Caso β piccolo:

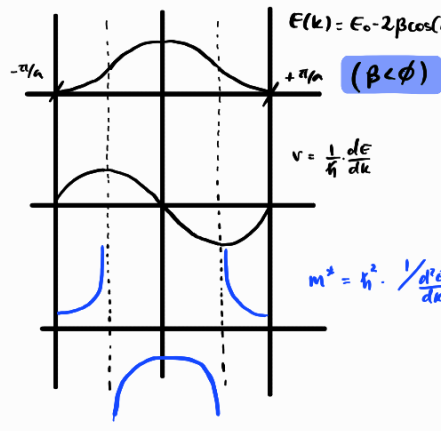
$$- \beta = \int \phi^*(x_j) \hat{H} \phi(x_{j+1}) dx$$

β è l'espressione della capacità dell'elettrone tra una buca e l'altra (è una espressione della sovrapp. di auto funz. adiacenti)

$\hookrightarrow m^*$ più grande a punti di forza applicata l'elettrone è meno mobile

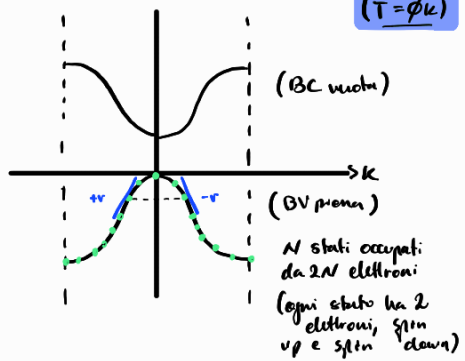
\hookrightarrow più l'elettrone è legato all'atomo e meno mobile

$E(k) = E_0 - 2\beta \cos(ka)$



• ci sono regioni per cui $m^* < \phi \Rightarrow$ applico una forza in un verso e accelero nel verso opposto (strano!).
 In realtà non c'è da stupirsi, ci sono in gioco le laterali forze del reticolo

$(T = \phi k)$



tempo di percorrenza

$$I_v = \sum_{i, \text{pieni}} \frac{-q}{L} v_i$$

simmetria sugli stati i-esimi pieni

$$= -q \sum_{i, \text{tutti}} \frac{v_i}{L} = -\frac{q}{L} \sum_{i, \text{tutti}} v_i = \phi$$

• $\forall k$ tutti gli stati in BV sono pieni

• $\forall k$ ho 2 stati elettronici

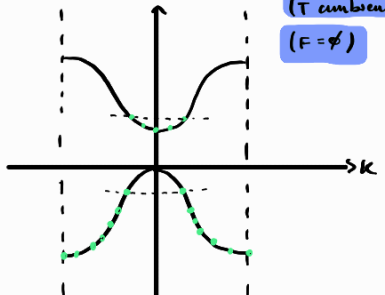
• $\forall k$ ho 2 stati elettronici

• \forall stato con $v > 0$ ho uno opposto con $-v$ quindi tutti gli elettroni si muovono ma $\langle v \rangle = 0$

$\Rightarrow I = \phi$ in una banda totalmente piena (anche in presenza di campo elettrico)

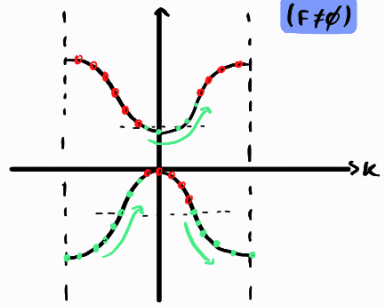
$(T \text{ cambiante})$

$(F = \phi)$



$$\begin{cases} I_c = -\frac{q}{L} \sum_{i, \text{pieni}} v_i = \phi \\ I_v = -\frac{q}{L} \sum_{i, \text{pieni}} v_i = \phi \end{cases}$$

$(F \neq \phi)$



$F \neq \phi \Rightarrow F = \frac{1}{h} \frac{dk}{dt}$ sto applicando una forza, il che mi causa uno spostamento/sbilanciamento degli elettroni
 \hookrightarrow le velocità non si compensano più

$$\Rightarrow \begin{cases} I_c \neq \phi \\ I_v \neq \phi \end{cases} \quad I_{\text{tot}} = I_c + I_v$$

$$I_v = -\frac{q}{L} \sum_{i, \text{pieni}} v_i = -\frac{q}{L} \left[\sum_{i, \text{tutti}} v_i - \sum_{i, \text{vuoti}} v_i \right] = \frac{+q}{L} \sum_{i, \text{vuoti}} v_i$$

\uparrow
lacune

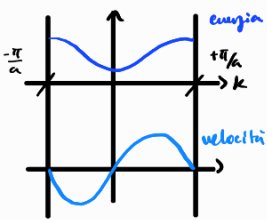
invece di considerare una marea di elettroni, ragiono su pochi stati vuoti come se fossero cariche positive

$$I_c = -\frac{q}{L} \sum_{i, \text{pieni}} v_i$$

\uparrow
elettroni

viceversa nella banda di cond. avrei una marea di lacune e quindi ragiono sugli elettroni

oscillazione di Bloch



concentraz.

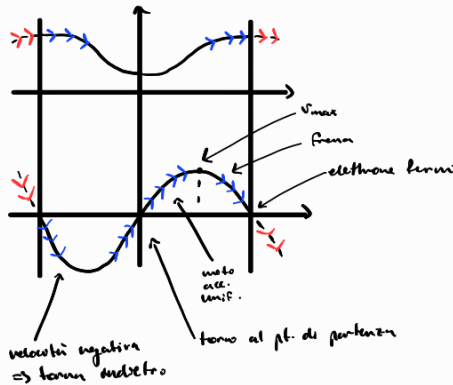
$$j = -qn \langle v \rangle = -q \int_k v(k) \cdot f(k) dk \cdot \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk}$$
 val. medio di v : non è cost., dipende da k
 statistica Fermi-Dirac, come gli elettroni popolano gli stati
 distribuz. degli stati

in presenza di $F < \phi \Rightarrow j = -qF > \phi$

$$\Rightarrow \frac{dk}{dt} = \frac{F}{\hbar} \Rightarrow k = k_0 + \frac{F}{\hbar} t$$

tight binding: $E(k) = E_0 - 2\beta \cos(ka + \frac{F a}{\hbar} t)$

$$\hookrightarrow v(k) = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} = -2\beta \sin(ka + \frac{F a}{\hbar} t) \cdot a$$



oscillazione di Bloch

\hookrightarrow corrente alternata

applico un campo costante F , e per effetto della periodicità della banda, ottengo un andamento oscillatorio della velocità e quindi della corrente

freq. di Bloch: $\omega = \frac{F a}{\hbar} \Rightarrow v = \frac{q F a}{\hbar}$
 $F \sim 100 \text{ kV/cm}, a \sim 0.35 \text{ nm} \Rightarrow v \sim 10^{14} \text{ Hz} \quad T = \frac{1}{v} \sim 1 \text{ ps}$
 val. tipico per logica CMOS

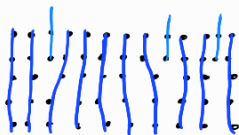
$T \sim 1 \text{ ps}$ alla scala del moto elettronico è lento, quindi prima che l'elettrone riesca a compiere il moto di un periodo incontrerà un evento di scattering

\hookrightarrow quindi in realtà non si manifesta in generale questo meccanismo di oscillaz. di Bloch

Scattering

1) difetti: * vacanza (mancanza di un atomo): è un difetto che dipende dalla statistica termodynamica, non è un difetto strutturale

* dislocazioni:



ho vicini con più atomi degli altri
 \Rightarrow nascono momenti verticali

* bordi di grano

* impurità ionizzate: sono il contributo principale dello scattering. Un esempio è il fosforo P^+ o boro B^- nel silicio drogato

2) vibraz. elastiche (fononi: quasi particelle)

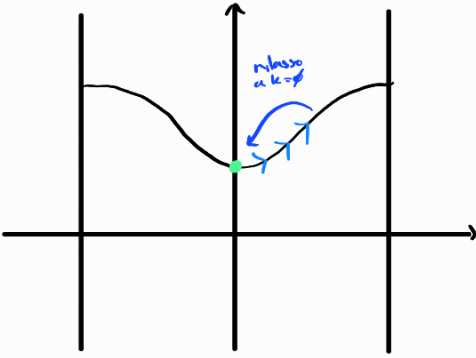
immagino gli atomi come se legati da molle



l'energia di vibraz. è quantizzata

i fronti d'onda associati al nodo vibraz. li vedo come quasi-particelle

rilassamento del momento



$$\tau_m = 10^{-13} \text{ s} < T_{\text{Bloch}} = \text{ps}$$

↳ non osservano oscillaz. di Bloch

modello Drude

• freno conto degli eventi di scattering

$$\frac{dk}{dt} = \frac{F}{\hbar} \Rightarrow \frac{dk}{dt} = \frac{F}{\hbar} - \frac{k}{\tau_m} \Rightarrow \text{eq. diff.}$$

lungo k come momento: $k \propto v \propto v$ (quantitativamente)

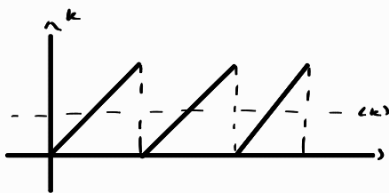
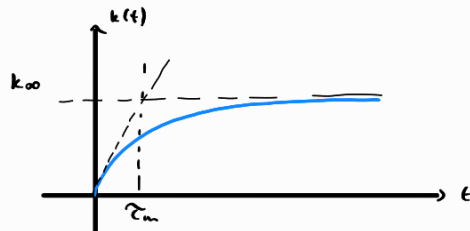
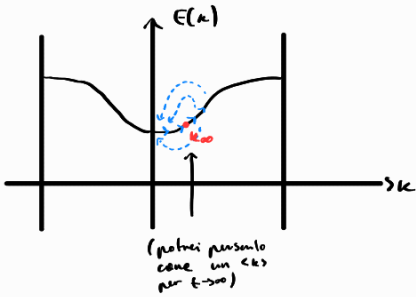
"accelerazione"
 $\frac{dv}{dt} \left(\frac{dk}{dt} \right)$

"attrito viscoso" nel
senso che è $\propto v(t)$
e si oppone all'acceleraz. (forza)

risolvendo trovato $\Rightarrow k(t) = k_{\infty} [1 - e^{-t/\tau_m}]$

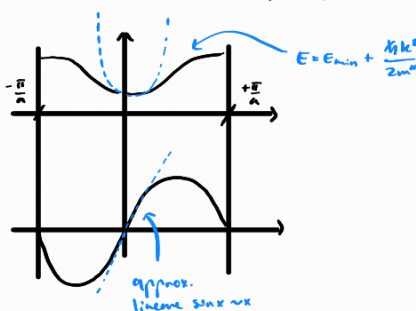
$t \ll \tau_m$ $\frac{dk}{dt} \sim \frac{F}{\hbar} \Rightarrow k = \frac{F}{\hbar} t$ inizialmente k cresce linearmente

$t \gg \tau_m$ $\frac{k_{\infty}}{\tau_m} = \frac{F}{\hbar} \Rightarrow k_{\infty} = \frac{F \tau_m}{\hbar}$ per $t \rightarrow \infty$ k si assesta a un val. stazionario (contrariamente al modello di Bloch in cui k continuava a crescere e l'elettrone continuava ad oscillare)
($k_{\infty} \ll \frac{\pi}{a}$)



modello alternativo
↳ ottengo $\langle k \rangle$ nello stesso ordine di grandezza di k_{∞}

essendo $k_{\infty} \ll \frac{\pi}{a} \Rightarrow$ approx parabolica

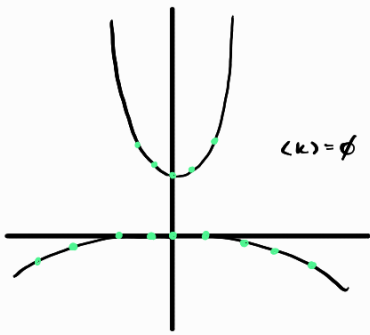


$$\begin{cases} k_{\infty} = \frac{-q \tau_m F}{\hbar} \\ v = \frac{\hbar k}{m^*} \end{cases} \Rightarrow v = \frac{-q \tau_m F}{m^*} = -\mu_n F$$

$$\mu_n = \frac{q \tau_m}{m^*}$$

applicare un campo non accelera l'elettrone, ma ne lo porta ad un val. cost.

$$\mu_n \sim 10 - 1000 \text{ cm}^2/\text{V}\cdot\text{s}$$



$$\langle k \rangle = \phi \quad (F = \phi)$$

(perciò per adesso attribuiamo sempre considerato un solo elettrone centrato in $k = \phi$)

$$j = qn v = qn \mu_n F \Rightarrow j = \sigma_n F = \frac{1}{j_n} F \quad \text{legge di Ohm locale}$$

$$j_n = \frac{1}{q n \mu_n} \quad [\Omega \cdot \text{cm}] \sim 10 \mu\Omega \cdot \text{cm}$$

$$j(\text{Ag}) = 1,6 \mu\Omega \cdot \text{cm}$$

$$j(\text{Cu}) = 1,68 \mu\Omega \cdot \text{cm}$$

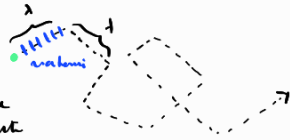
$$j(\text{Pb}) = 22 \mu\Omega \cdot \text{cm}$$

$$\lambda = \text{mean free path} = v_{th} \cdot \tau_m$$

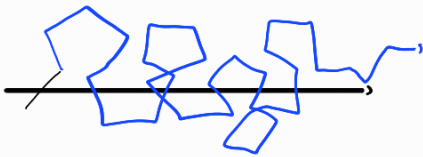
$$\frac{1}{2} m^* v_{th}^2 = \langle E \rangle = \frac{3}{2} kT$$

$$v_{th} \sim 10^7 \text{ cm/s}$$

$$\lambda \sim 10 \text{ nm}$$



$\lambda \gg a$ dimostrano che l'elettrone effettivamente "sorvola" sul reticolo, come se fosse libero (i problemi sono i difetti)



moto con campo applicato

reticolo reciproco

$$J = -q n v \Rightarrow \text{flusso di carica}$$

↑
flusso
corrente

$$v = \mu F$$

$$n = \int g(k) \cdot f(k) dk$$

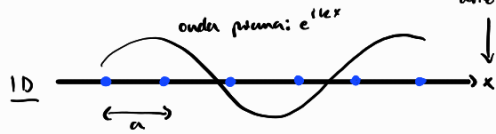
↑
densità
di stati
(stati elettronici)

↑
distribuz. energetica
degli elettroni
 \Rightarrow statistica di
Fermi-Dirac

reticolo reciproco

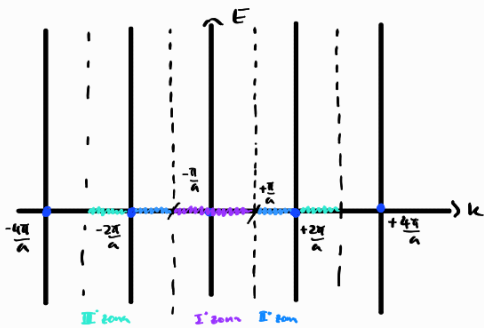
nel dominio dei k : m^{-1}

reticolo diretto



reticolo reciproco: è composto dai vettori d'onda g (i.e. l'onda piana è periodica sul reticolo diretto)

$$\Rightarrow e^{ig(x+a)} = e^{igx} \quad (\text{in generale: } e^{ig(x+na)} = e^{igx}) \Rightarrow g = \frac{2\pi}{a} n \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



prima zona di Brillouin: è la cella di Wigner-Seitz del reticolo reciproco
per la seconda, terza ecc. zone, considero i secondi, terzi punti vicini

$$\text{2D e 3D} \Rightarrow e^{i\vec{g} \cdot (\vec{r} + \vec{R})} = e^{i\vec{g} \cdot \vec{r}} \quad \vec{R} = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 + n_3 \vec{a}_3$$

$$\Rightarrow e^{i\vec{g} \cdot \vec{R}} = 1 \Rightarrow \vec{g} \cdot \vec{R} = 2\pi n$$

si dimostra che: $\vec{g} = m_1 \vec{b}_1 + m_2 \vec{b}_2 + m_3 \vec{b}_3$ dove $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ sono i vett. primitivi del reticolo reciproco

con $\vec{b}_1 = 2\pi \cdot \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\Omega}$

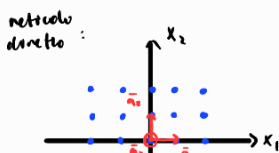
$\vec{b}_2 = 2\pi \cdot \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\Omega}$

$\vec{b}_3 = 2\pi \cdot \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\Omega}$

dove $\Omega = \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \times \vec{a}_3$ volume della cella primitiva del reticolo diretto

$$\Rightarrow \vec{g} \cdot \vec{R} = 2\pi (n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3) = 2\pi n$$

in 2D:



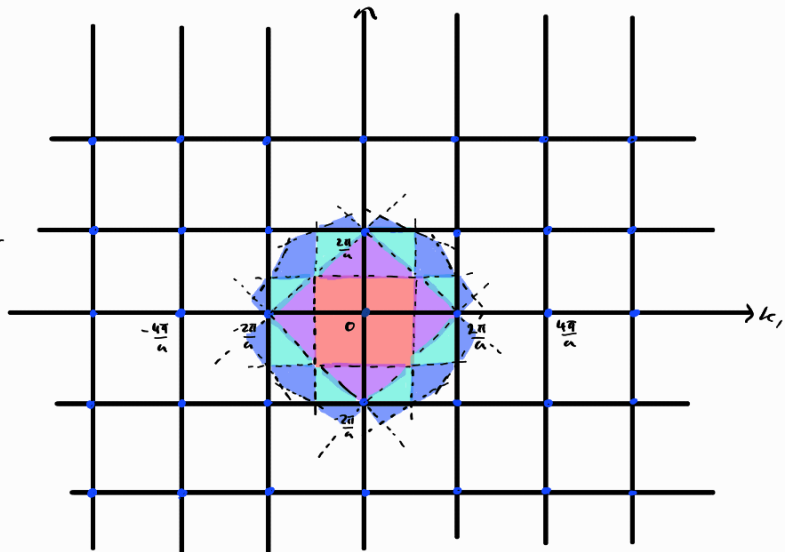
$$\Rightarrow \vec{b}_1 = 2\pi \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\Omega}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \hat{u}_1$$

$$= \frac{2\pi}{a_1} \hat{u}_1$$

non a'?

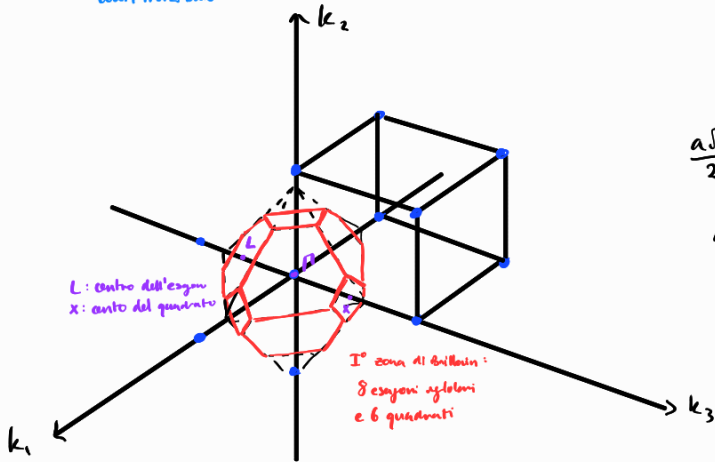
per l'n-esima zona non dico attraversare più di n-1 piani di Bragg (linee tratteggiate)



le aree delle zone devono essere sempre pari all'area della cella primitiva

DIRETTO	RECIPROCO
cubo semplice	cubo semplice
BCC	FCC
FCC	BCC

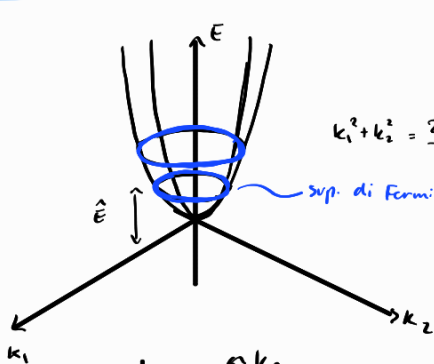
↑
 semiconduttori (Si, Ge, GaAs)
 ←
 trasformo
 anti trasformo



$$\frac{a\sqrt{3}}{2} < a \Rightarrow \text{i punti vicini sono i centri del cubo}$$

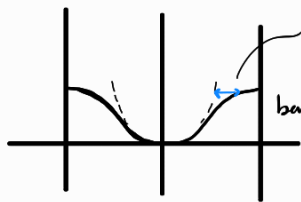
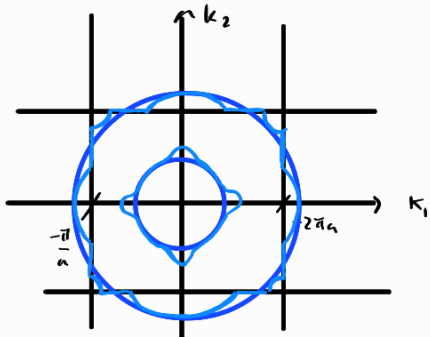
devo anche tenere conto con gli atomi sugli assi

Superfici di Fermi



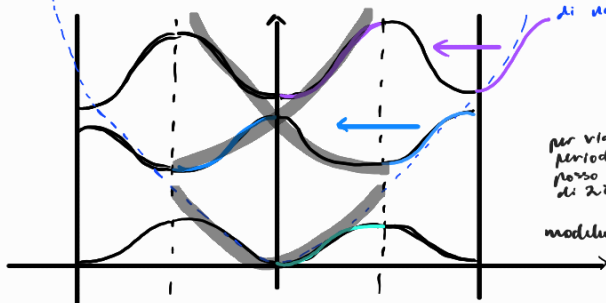
$$E = \frac{\hbar^2 (k_1^2 + k_2^2)}{2m^*} \quad \text{approx. parabolica}$$

$$k_1^2 + k_2^2 = \frac{2m^* \hat{E}}{\hbar^2} = k^2 \quad \leftarrow \text{fisso un val. di } E$$



non sono che un'alterazione l'approx. parabolica è meno valida. Per ottenere un andamento più rigoroso devo pensare alla banda come "attratta" dal piano di Bragg

in 3D avrà delle sfere con dei "lobi"



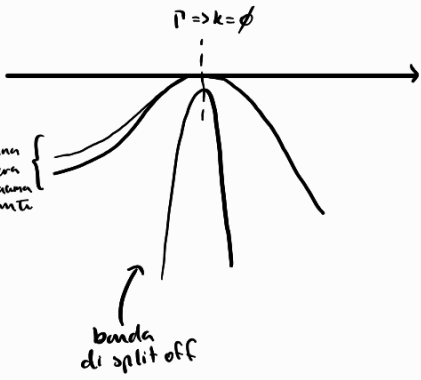
relaz. disp. quadratica di un elettrone libero

per via della periodicità posso traslare di 2π

modello di weak binding

• nei semiconduttori rappresento l'energia lungo direz. parallela

$\Gamma \rightarrow x$ (A) (direzioni ad alta simmetria)
 $\Gamma \rightarrow z$ (A)



4 bande di valenza (una è ad energia più basse)

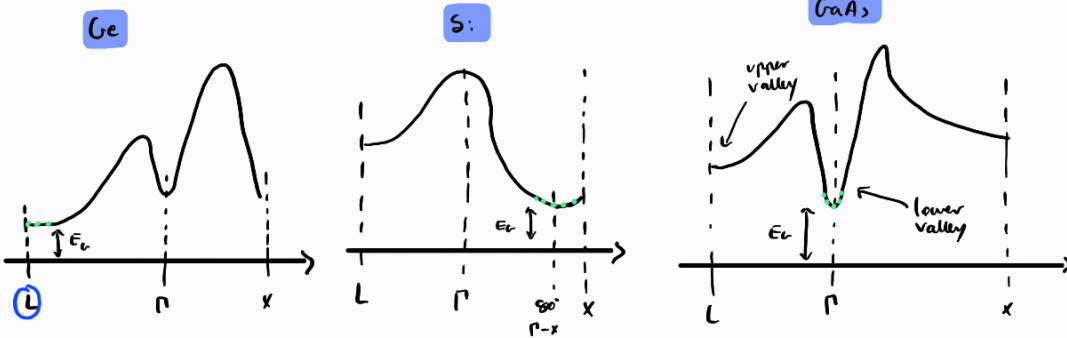
Le bande di valenza per Ge, Si, GaAs sono sostanzialmente uguali:

• per le bande di cond. invece troviamo andamenti molto diversi

posizione del min. diverso per i materiali

ho 8 punti
 Ge: punto L \Rightarrow degeneraz. $\frac{3}{2} = 4$
 Si: 80% di $\Gamma-X \Rightarrow$ degeneraz. $= 6$
 GaAs: $\Gamma \Rightarrow$ no degeneraz.
 note del min. è nella prima zona di Brillouin, altri sta fuori
 sono all'80% di $\Gamma-X$, quindi tutto il min. è contenuto all'interno della zona di Brillouin

degeneraz.: molteplicità dei minimi



ogni minimo è popolato da elettroni di conduzione

• approx. parabolica nell'intorno del min:

$$E = E_c + \frac{\hbar^2}{2m_l^*} (k_x - k_{x_0})^2 + \frac{\hbar^2}{2m_t^*} k_y^2 + \frac{\hbar^2}{2m_t^*} k_z^2$$

longitudinale trasversale

anisotropia della massa (cambia l'curvatura lungo le varie direzioni)

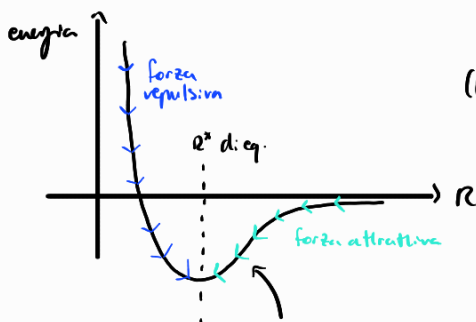
\Rightarrow è l'eq. di un ellissoide

band gap narrowng:

$$E_g(T) = E_g(0) - \frac{\alpha T^2}{T + \beta}$$

legge di Varshni (legge sperimentale)

• aumento la temp. \Rightarrow si dilata il materiale



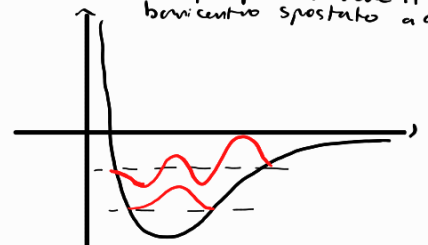
(legame covalente)

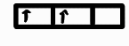
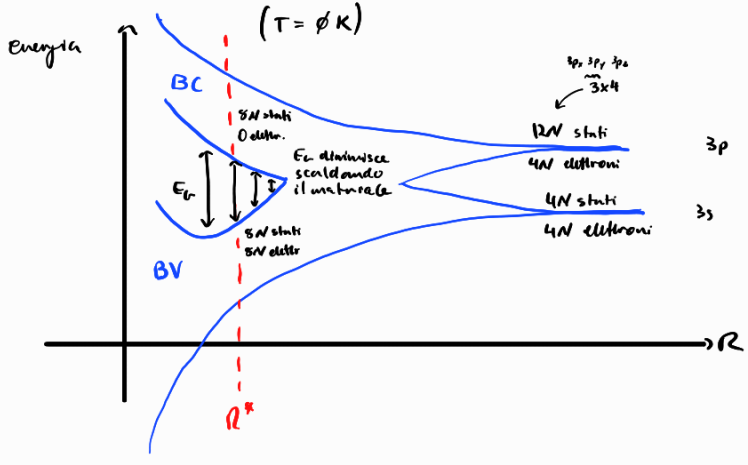
locamenti approx. a una forza elastica (approx. parabolica)

vibraz. retcolari, perciò immagino i legami come molle \Rightarrow fononi

$$R^* \rightarrow \phi \text{ per } T \rightarrow \phi$$

per T crescente \Rightarrow risolvo l'eq. Schrodinger e trovo che è più prob. trovare il baricentro spostato a dx





N : n° atomi nel cristallo

$$J = -qnV_n ; V_n = M_n F$$

$$n = \int_{BC} g_n(E) \cdot f(E) dE$$

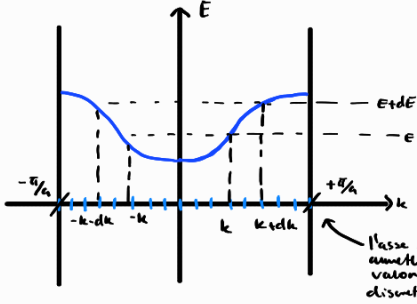
↑
densità di stati (elettronici)

$$J = +qpV_p ; V_p = M_p F$$

$$p = \int_{BV} g_p(E) \cdot f(E) dE$$

densità di stati

CASO 1D



$$k_n = \frac{2\pi \cdot n}{a} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{a}{2}$$

(dalle condizioni di periodicità al contorno)

essendo il numero di k discreto, numerabile, ha senso definire una densità di stati

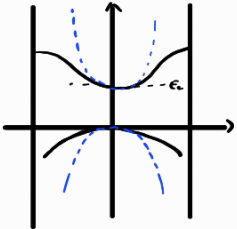
$$\Rightarrow g(k) \cdot dk = \underbrace{\frac{dk}{2\pi/a}}_{\substack{\text{n° di stati} \\ \text{tra } k \text{ e } k+dk}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\text{normalizzo per} \\ \text{in dim. del cristallo}}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\text{ogni stato} \\ \text{da occupare con} \\ \text{elettroni}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{V}}_{\substack{\text{ogni stato} \\ \text{è come un} \\ \text{orbitale}}} \Rightarrow g(k) dk = \frac{2}{\pi} dk$$

↔
considero anche gli stati tra $-k$ e $-k-dk$ → in 1D ho due versi di propagaz.

$g(E)$ ($g(k)$) come lo determino? Dipende dalla forma della banda

⇒ bisogna generalizzare la forma di una banda

tendenzialmente ci interessa soltanto il min. della BC o max. della BV ⇒ approx. parabolica



$$\Rightarrow E_c = E + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n^*} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{m_n^*(E - E_c)}}{\hbar}$$

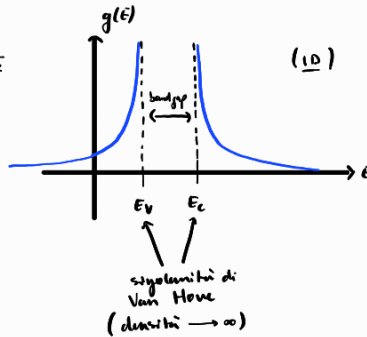
- H.p.
- isotropia della massa nel minimo (in 3D m^* è una derivata direzionale ⇒ ogni m^* uguale \forall direzione)
 - min./max. centrati in $k=0$
 - unico max./min.

$$g(E) dE = g(k) dk \Rightarrow g(E) = \frac{g(k)}{dE/dk}$$

$$\frac{dE}{dk} = \frac{\hbar^2}{m_n^*} k \Rightarrow g(E) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\frac{\hbar^2}{m_n^*} k} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{m_n^*}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{k}$$

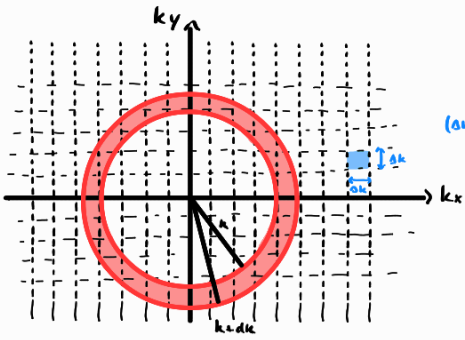
$$\Rightarrow g(E) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{m_n^*}{\hbar^2} \cdot \frac{\hbar}{\sqrt{2m_n^*(E - E_c)}}$$

$$\Rightarrow g(E) = \frac{1}{\pi \hbar} \cdot \sqrt{\frac{2m_n^*}{E - E_c}} \quad (10)$$



(ripetutamente analogo per la banda di valenza ma considero $k = \frac{\sqrt{2m_p^*(E - E_v)}}{\hbar}$)

caso 2D



$(dk)^2 = (\frac{2\pi}{Na})^2$

(ripetutamente analogo per la banda di valenza ma considero $k = \frac{\sqrt{2m^*(E_v-E)}}{\hbar}$)

2 gradi liberi: \Rightarrow 1 grado confinato

Le circonferenze sono i luoghi dei pt. con $k = |\vec{k}| \cos \phi$.

$\Rightarrow k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ ($\vec{k} = k_x \hat{u}_x + k_y \hat{u}_y$)

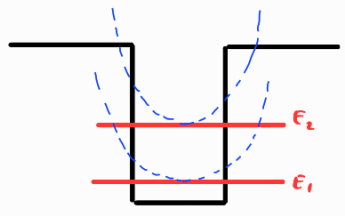
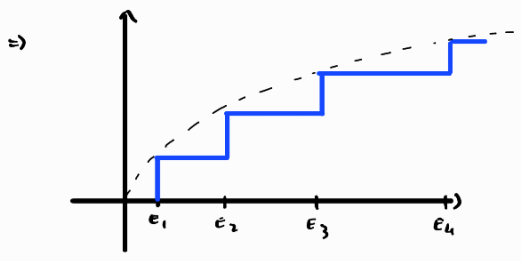
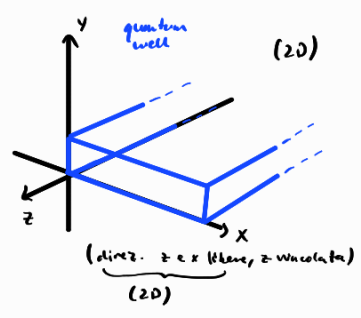
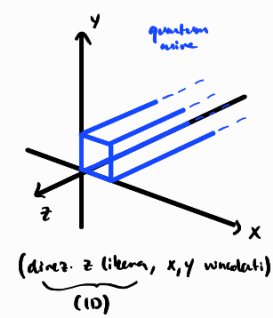
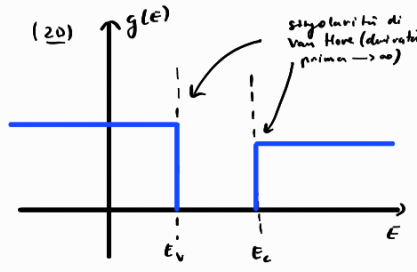
n° di stati tra k e $k+dk$: $\frac{\text{area della cella}}{\text{area del quadrato}}$

$\Rightarrow g(k) dk = \frac{2\pi k dk}{(\frac{2\pi}{Na})^2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{(Na)^2} \Rightarrow g(k) dk = \frac{k}{\pi} dk$

degeneraz. di spin
area del cristallo (normalizzato)

$\Rightarrow g(E) = \frac{g(k)}{dE/dk} = \frac{k/\pi}{\hbar^2 k/m^*} \Rightarrow g(E) = \frac{m^*}{\pi \hbar^2}$

(questa volta non ci va il fattore 2 dovuto alle direz. di k; tutta la direz. di k sono già considerate nel fatto che considero una circonferenza)

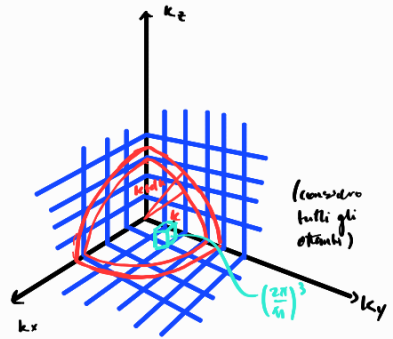


mi poggio nel livello E_1 : ho 1 direz. vincolata, e 2 libere \Rightarrow mi tingono una approx. "parabolica" (caso 2D)

\Rightarrow ottengo un gradino in E_1

avvertendo l'energia, trovo E_2 , che mi dà un ulteriore contributo di gradino, e così via

caso 3D



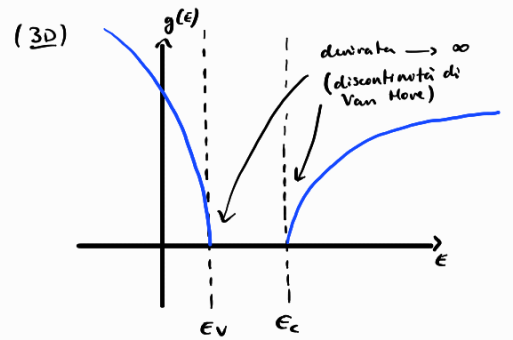
(considero tutti gli stati)

$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$
 $\Rightarrow g(k) dk = 2 \cdot \frac{4\pi k^2 dk}{(\frac{2\pi}{Na})^3} \cdot \frac{1}{(Na)^3} = \frac{k^2}{\pi^2} dk$

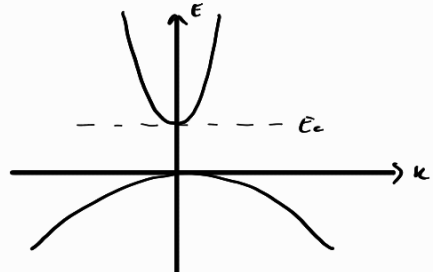
degeneraz. di spin
volume griglia
volume della cella
normalizzo per il volume del cristallo

$\Rightarrow g(E) = \frac{g(k)}{dE/dk}$

$\Rightarrow g(E) = \frac{(2m^*)^{3/2}}{2\pi^2 \cdot \hbar^3} \cdot \sqrt{E - E_c}$

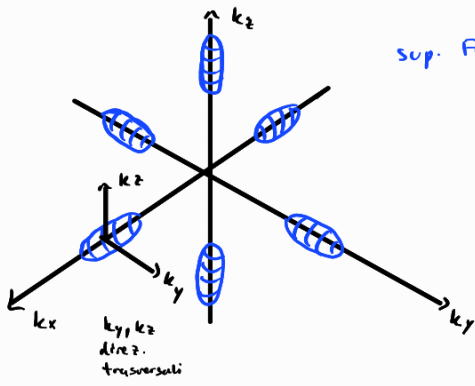


l'unico conduttore che rispetta le Hq. fatte è GaAs

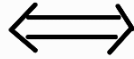


\Rightarrow occorre generalizzare quanto fatto fino ad adesso per sistemi multipli, masse anisotrope e band gap indiretti

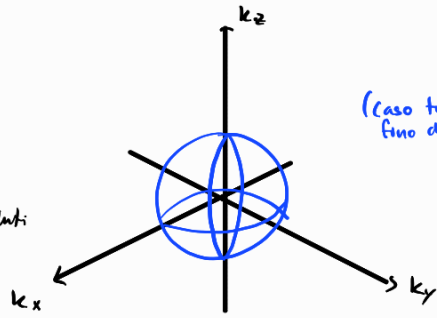
massa efficace DOS (density of states)



sup. Fermi sferico



voglio che siano in qualche modo equivalenti

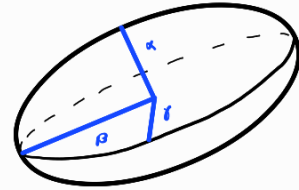


(caso trattato fino d'ora)

⇒ devo trovare m^* e.c. nella sfera siano contenuti gli stessi stati che negli ellissoidi

$$E = E_c + \frac{\hbar^2 (k_x - k_0)^2}{2m_l^*} + \frac{\hbar^2 (k_y + k_z)}{2m_t^*} \Rightarrow \frac{(k_x - k_0)^2}{\frac{2m_l^* (E - E_c)}{\hbar^2}} + \frac{(k_y^2 + k_z^2)}{\frac{2m_t^* (E - E_c)}{\hbar^2}} = 1$$

\uparrow k_x direzione log; longitudinale
 \uparrow k_y e k_z trasversali
 \uparrow a^2
 \uparrow $b^2 (= r^2 \text{ in questo caso})$



$$V = \frac{4}{3} \pi a b^2 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi \frac{\sqrt{2m_l^* (E - E_c)}}{\hbar} \cdot \frac{2m_t^* (E - E_c)}{\hbar^2} \cdot g$$

\uparrow
degenerazione (=6 in questo caso)

$$E = E_c + \hbar^2 \frac{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}{2m_n^*} \Rightarrow k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{2m_n^* (E - E_c)}{\hbar^2} R^2$$



⇒ n° stati ellissoidi = n° stati sfera

$$\Rightarrow \frac{V_{\text{ellissoidi}}}{V_{\text{gitter}}} = \frac{V_{\text{sfera}}}{V_{\text{gitter}}} \Rightarrow V_{\text{ellissoidi}} = V_{\text{sfera}}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \pi \frac{\sqrt{2m_l^* (E - E_c)}}{\hbar} \cdot \frac{2m_t^* (E - E_c)}{\hbar^2} g = \frac{4}{3} \pi \left[\frac{2m_n^* (E - E_c)}{\hbar^2} \right]^{3/2}$$

con cosa si semplifica?

$$\Rightarrow (m_n^*)^{3/2} = g m_l^{1/2} m_t^*$$

\uparrow
massa DOS

	m_l^*	m_t^*	g	m_{DOS}^*	← ($m_n^* = m_l \cdot m_{\text{DOS}}^*$, è relativa)
Si	0,91	0,14	6	1,06	
Ge	1,59	0,085	4	0,1553	

per quanto riguarda la banda di valenza: tendenzialmente ho il minimo, centrato in $k=0$

$$\Rightarrow g(E) = g_{hh}(E) + g_{ch}(E) \quad (\text{come se avessi 2 sfere})$$

\uparrow banda lacuna pesante
 \uparrow banda lacuna leggera

si trova:

$$m_p^{3/2} = m_{hh}^{3/2} + m_{ch}^{3/2}$$

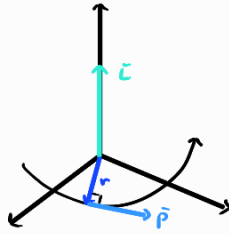
statistica di Fermi-Dirac

• "gas" di elettroni (sistemi di tante particelle)

momento angolare (classico)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

\uparrow \uparrow
 posiz. del corpo momento / qt. di moto



• nella meccanica quantistica: \vec{L} è quantizzato

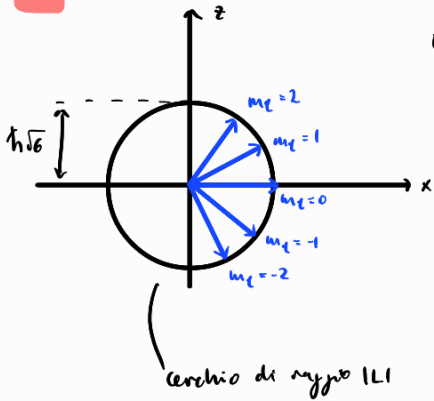
• operatore \hat{L} commuta con \hat{H}

• $|\vec{L}|^2$ è perfettamente det. $\Rightarrow |\vec{L}|^2 = \hbar^2 l(l+1)$
 \uparrow n° quantico associato al momento

$l = \emptyset, 1, 2, 3$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 orbitali s p d f

• fissata l'asse z anche L_z è perfettamente det. $\Rightarrow L_z = \hbar m_l$ m_l n° quantico: $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ (multiplicità)

e.s.

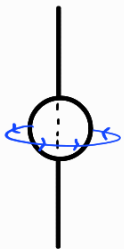


$$l=2 \Rightarrow |\vec{L}|^2 = \hbar^2 6 \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2 \Rightarrow L_z = \hbar m_l$$

- modulo è perf. det.
 - proiez. su z è perf. det.
- ma \vec{L} vettore no!

Si: momento di spin

• ha le stesse prop. del momento angolare

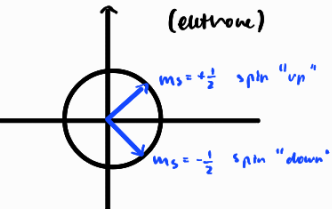


$$|s|^2 = \hbar^2 s(s+1) \quad s \text{ n° quantico di spin}$$

$$s_z = \hbar m_s \quad m_s = 0, \pm 1, \dots, \pm s$$

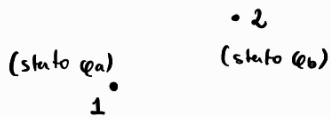
- nel caso dell'elettrone: $s = \frac{1}{2}$ (anche per neutrone / protone)
- per il Protone: $s = 1$
- particella α (nucleo He-4): $s = \emptyset$

(elettrone)



(in realtà non è che ruota verso su o verso giù, sappiamo solo il segno della componente $z \leq 0$)

consideriamo delle particelle indistinguibili



misurando possiamo dire che c'è o non c'è una particella, ma non distinguiamo l'elettrone 1 dall'elettrone 2

$$\Rightarrow \Psi_{ab}(x_1, x_2) = \underbrace{\varphi_a(x_1)}_{\substack{\text{particella 1...} \\ \text{...nello stato "a"}}} \cdot \varphi_b(x_2)$$

funz. d'onda che descrive la 1 nello stato "a", e la 2 nello stato "b"

scambio le particelle

$$\Rightarrow \Psi_{ab}(x_2, x_1) = \varphi_a(x_2) \cdot \varphi_b(x_1)$$

sono indistinguibili $\Rightarrow |\Psi_{ab}(x_2, x_1)|^2 = |\Psi_{ab}(x_1, x_2)|^2$

Ψ_{ab} deve essere simmetrica rispetto lo scambio $\Rightarrow \Psi_{ab}(x_1, x_2) = \pm \Psi_{ab}(x_2, x_1)$

- + BOSONI (funz. "pari" rispetto lo scambio)
- FERMIONI (funz. "dispari" rispetto lo scambio)

$\Psi_{ab}(x_1, x_2)$ scritta come prima non rispettava questa simmetria

$$\begin{cases} \Psi_{ab}^+(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_a(x_1)\varphi_b(x_2) + \varphi_a(x_2)\varphi_b(x_1)) = \Psi_{ab}^+(x_2, x_1) & \text{caso "pari" di Bosoni} \\ \Psi_{ab}^-(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_a(x_1)\varphi_b(x_2) - \varphi_a(x_2)\varphi_b(x_1)) = -\Psi_{ab}^-(x_2, x_1) & \text{caso "dispari" di Fermioni} \end{cases}$$

$$\Psi_{aa}^-(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_a(x_1) \cdot \varphi_a(x_2) - \varphi_a(x_1) \cdot \varphi_a(x_2)) = \emptyset$$

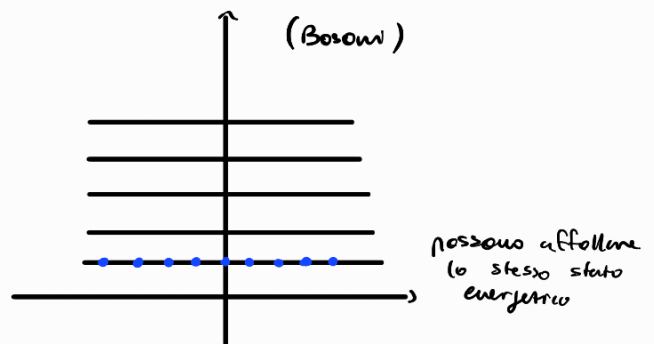
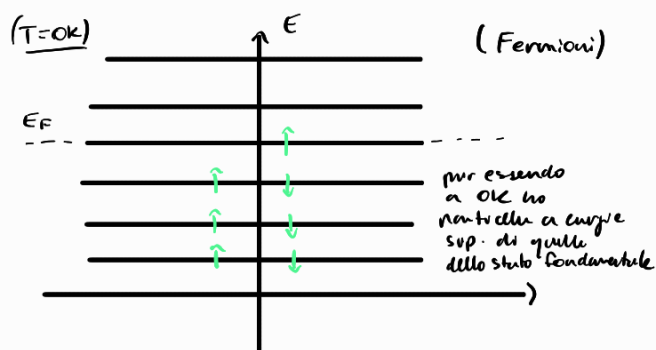
↑
 particella 1 e
 particella 2
 nello stesso stato

\Rightarrow quantisticamente, 2 Fermioni non possono occupare lo stesso stato!

↳ principio di esclusione di Pauli

$$\Psi_{aa}^+(x_1, x_2) \neq \emptyset \Rightarrow \text{non ci applica ai Bosoni}$$

\Rightarrow Bosoni e Fermioni avranno una statistica diversa



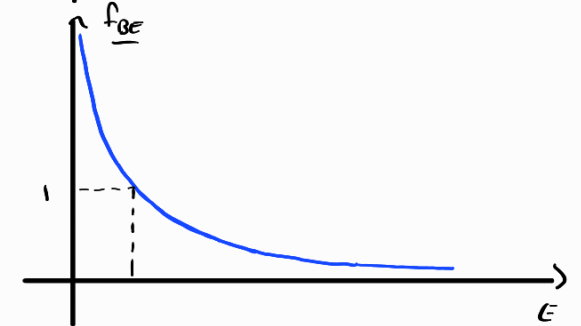
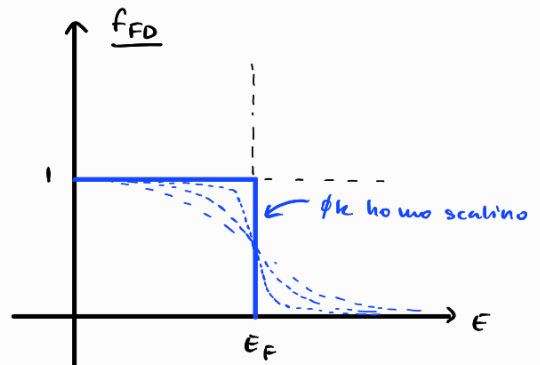
avendo degeneraz. di spin, è come se lo stato ha due elettroni

$$f_{FD} = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}$$

Fermi Dirac

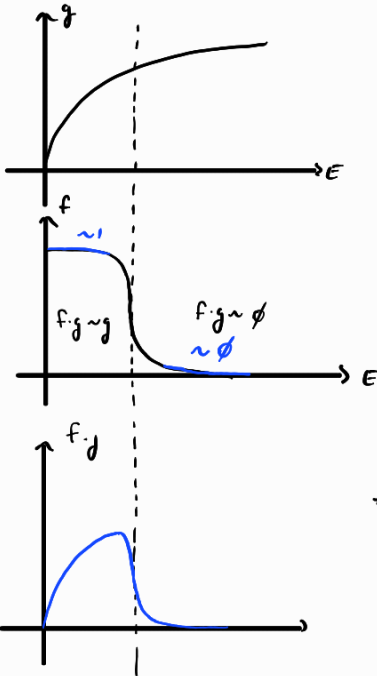
$$f_{BE} = \frac{1}{e^{\frac{E}{kT}} - 1}$$

Bose Einstein



- f_{BE} mi dice il n° medio di elettroni che occupano un certo stato energetico
- nel caso f_{FD} , $0 \leq f_{FD} \leq 1$ (è una probabilità) perché per il principio di esclusione ψ stato ho 1 elettrone

caso di metalli



$$\Rightarrow n = \int_0^{+\infty} f(E)g(E)dE = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} \cdot \frac{(2m^*)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \cdot \sqrt{E} dE$$

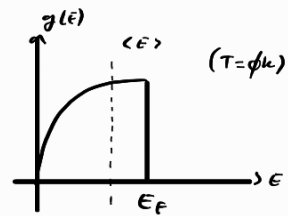
approx. $T = \phi k$ ($f \rightarrow$ scalino) $\Rightarrow \int_0^{E_F} g(E) dE$

$$\Rightarrow n = \int_0^{E_F} \frac{(2m^*)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{E} dE = \frac{(2m^*)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \cdot \frac{2}{3} E_F^{3/2}$$

$$\Rightarrow E_F = \frac{\hbar^2}{2m^*} \cdot (3\pi^2 n)^{2/3}$$

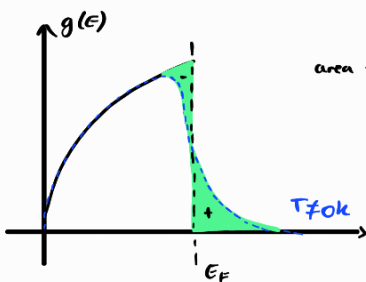
$$\langle E \rangle = \int_0^{E_F} E g(E) dE = \left(\int_0^{E_F} E \frac{(2m^*)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{E} dE \right) \cdot \frac{1}{n} = \dots = \frac{3}{5} E_F$$

normalizzo per n trovato prima, quindi $g(E)$ non è una d.d.p.



per $T > \phi k$ si trova $\Rightarrow E_F(T) = E_F(T = \phi k) \cdot \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_F(T=0)} \right)^2 \right]$ $\langle E_F(T = \phi k) \rangle$ in generale

se $T \uparrow$, $E_F \downarrow$



area + > area - \Rightarrow ho più elettroni \Rightarrow impossibile! n è costante

$\rightarrow E_F$ retroceda per fare tornare tutto

	m_n^*/m_e	n [cm^{-3}]	$E_F(T=0K)$	$E_F(T=300K)$ [eV]
Li	1,4	$4,6 \cdot 10^{22}$	4,6926	4,6925
Na	0,98	$9,5 \cdot 10^{22}$	3,1251	3,1250
K	0,94	$1,3 \cdot 10^{22}$	2,0209	2,0206
Rb	0,87	$1,1 \cdot 10^{22}$	1,8679	1,8676

$$E_F(T=0K) \sim E_F(T=300K)$$

(approx. a 0K va più che bene)

$m_n^*/m_e \sim 1 \Rightarrow$ elettroni sono praticamente liberi:

questo perché hanno energia di ionizzazione bassa, tendono a cedere elettroni (prop. del I° gruppo)

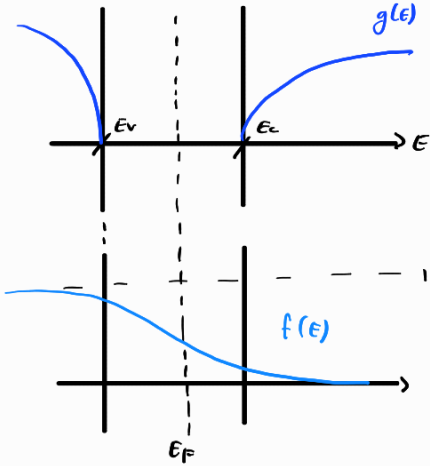
\Rightarrow weak binding ottima approx. per questi elementi:

$$n = \int_{E_c}^{\infty} g(E) f(E) dE \quad (\text{per i metalli, dove } E_F > E_c)$$

$$g(E) = \frac{(2m_n^*)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E - E_c} \quad \approx 0, \text{ con approx. parabolica}$$

$$f(E) = \int_{E_c}^{\infty} g(E) f(E) dE \quad \text{si applica a qualunque banda, basta essere all'equilibrio}$$

caso semiconduttori



• $E_v < E_F < E_c$

$$n = \int_{E_c}^{\infty} \frac{(2m_n^*)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E - E_c} \cdot \frac{1}{e^{\frac{E - E_F}{kT}} + 1} dE \quad \text{integrale di Fermi}$$

(ci sono dei valori tabulati)

\Rightarrow approx. MB (Maxwell-Boltzmann)

se E_F suff. $< E_c \Rightarrow e^{\frac{E - E_F}{kT}} + 1 \sim e^{\frac{E - E_F}{kT}}$
 $(E > E_c > E_F)$

per suff. grande si intende $E_c - E_F > 3kT$

potrebbe fallire per drogaggio alto, casi degeneri

$\Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{E - E_F}{kT}} + 1} \sim e^{-\frac{E - E_F}{kT}}$ che è la statistica di Maxwell-Boltzmann

$\hookrightarrow n \sim \frac{(2m_n^*)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \int_{E_c}^{\infty} \sqrt{E - E_c} \cdot e^{-\frac{E - E_F}{kT}} \cdot dE$ è risolvibile analiticamente

$x = \sqrt{\frac{E - E_c}{kT}} \Rightarrow E = x^2 kT + E_c \Rightarrow \frac{dE}{d(x^2)} = kT$

$\Rightarrow \frac{(2m_n^*)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \cdot (kT)^{3/2} \int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} \cdot d(x^2)$

$\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} d(x^2) = -\int_0^{\infty} x d(e^{-x^2}) = [-x e^{-x^2}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Integrale di metà Gaussiana)

$\left[\frac{d(e^{-x^2})}{d(x^2)} = -e^{-x^2} \right]$

$\Rightarrow n = \frac{1}{4\pi^3} \left(\frac{2m_n^* kT}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_c - E_F}{kT}} \Rightarrow n = N_c e^{-\frac{E_c - E_F}{kT}}$ con $N_c = \frac{1}{4\pi^3} \cdot \left(\frac{2m_n^* kT}{\pi} \right)^{3/2}$

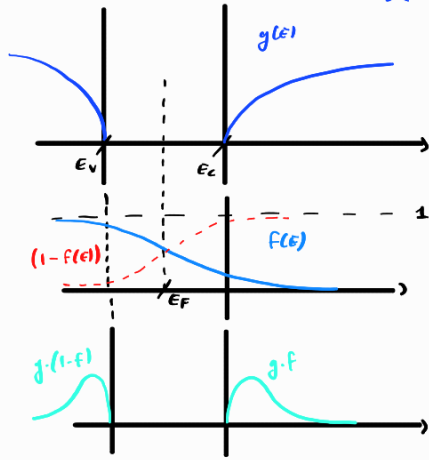
N_c : densità effettiva di stati in banda di conduzione

\hookrightarrow è un num. che tiene conto di tutta la densità di stati sommando di collassare tutti gli stati in E_c ($E_F = E_c$)

$$\rho = \int_{-\infty}^{E_V} \frac{(2m_p^*)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E_V - E} \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{E - E_F}{kT} + 1}}\right) dE$$

$1 - f(E)$:
prob. che lo stato
sia vuoto

$$1 - \frac{1}{e^{\frac{E - E_F}{kT} + 1}} = \frac{e^{\frac{E - E_F}{kT}} + 1}{e^{\frac{E - E_F}{kT}} + 1}$$



$$\rho = \int_{-\infty}^{E_V} \frac{(2m_p^*)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E_V - E} \cdot \frac{e^{\frac{E - E_F}{kT}}}{e^{\frac{E - E_F}{kT}} + 1} dE = \int_{-\infty}^{E_V} \frac{(2m_p^*)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E_V - E} \cdot \frac{1}{e^{\frac{E - E_F + E_V - E_V}{kT}} + e^{-\frac{E - E_F}{kT}}} dE$$

se $E < E_V < E_F \rightarrow E_F - E_V > 3kT$

$$\rho = \frac{(2m_p^*)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \int_{-\infty}^{E_V} \sqrt{E_V - E} \cdot e^{\frac{E - E_F + E_V - E_V}{kT}} dE$$

$$\rho = \frac{(2m_p^*)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \cdot e^{\frac{E_V - E_F}{kT}} \cdot \int_{-\infty}^{E_V} \sqrt{E_V - E} \cdot e^{\frac{E - E_V}{kT}} dE$$

$$\int_{-\infty}^{E_V} \sqrt{E_V - E} \cdot e^{\frac{E - E_V}{kT}} dE = (kT)^{3/2} \cdot \int_{\infty}^0 x e^{-x^2} d(x^2) = (kT)^{3/2} \cdot \int_0^{\infty} x e^{-x^2} d(x^2)$$

$x = \sqrt{\frac{E_V - E}{kT}} \Rightarrow E = x^2 kT - E_V$

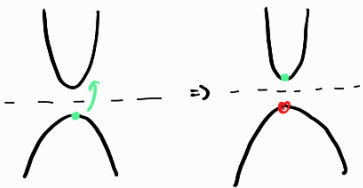
uguale al caso precedente

$$\rho = \frac{1}{4\hbar^3} \cdot \left(\frac{2m_p^* kT}{\pi}\right)^{3/2} e^{\frac{E_V - E_F}{kT}}$$

$$\Rightarrow \rho = N_V \cdot e^{\frac{E_V - E_F}{kT}}$$

$$\text{con } N_V = \frac{1}{4\hbar^3} \left(\frac{2m_p^* kT}{\pi}\right)^{3/2}$$

semiconduttori intrinseci



generazione termica \Rightarrow genero una lacuna e un elettrone

\hookrightarrow quindi negli intrinseci $\Rightarrow n = p$

$$\Rightarrow N_c e^{-\frac{E_c - E_F}{kT}} = N_v e^{\frac{E_V - E_F}{kT}} \Rightarrow e^{\frac{2E_F}{kT}} = \frac{N_v}{N_c} e^{\frac{E_c + E_V}{kT}} \Rightarrow \frac{2E_F}{kT} = \frac{E_c + E_V}{kT} + \log\left(\frac{N_v}{N_c}\right)$$

$$\Rightarrow E_F = E_i = \frac{E_c + E_V}{2} + \frac{3}{4} kT \log\left(\frac{m_p^*}{m_n^*}\right)$$

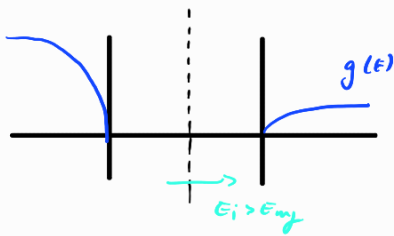
livello intrinseco \uparrow
 E_{hg} (half-gap)
 fattore correttivo

E_F si pone t.c. :



perciò serve il fattore correttivo

per esempio: (GaAs)



se $E_F = E_{F0}$ non si avrebbe $n=p$

popolerei in modo simmetrico la BC e la BV \Rightarrow ma data la asimmetria della $g(E)$ avrei pochi elettroni in BC e relativamente tanti in BV

$\hookrightarrow E_F$ si sposta per compensare questo effetto per garantire $n=p$

Ge: $E_i = E_{F0} - 3,68 \text{ meV}$

Si: $E_i = E_{F0} - 3,17 \text{ meV}$

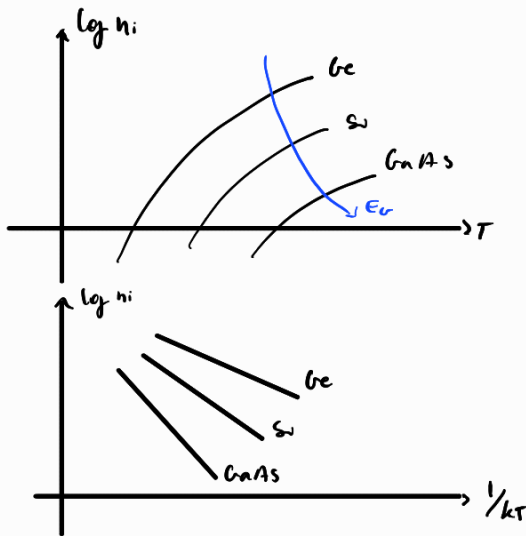
GaAs: $E_i = E_{F0} + 17,5 \text{ meV}$

$n=p = n_i$ concentraç. intrinseca

$\Rightarrow n \cdot p = n_i^2 = N_c \cdot N_v \cdot e^{-\frac{E_c - E_v}{kT}} \Rightarrow n_i = \sqrt{N_c \cdot N_v} e^{-\frac{E_g}{2kT}}$

non dipende da E_F

\hookrightarrow è indipendente dal drogaggio (ha validità generale)

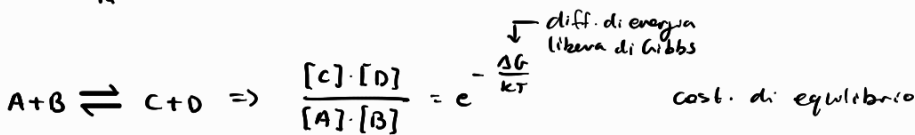


$\log n_i = \log \sqrt{N_c N_v} - \frac{E_g}{2kT}$

Arrhenius plot

	[eV]	N_c	N_v	n
Ge	0,66	$1,03 \cdot 10^{19}$	$5,35 \cdot 10^{18}$	$2,15 \cdot 10^{13}$
Si	1,12	$3,22 \cdot 10^{19}$	$1,85 \cdot 10^{19}$	10^{10}
GaAs	1,42	$4,2 \cdot 10^{17}$	$9,32 \cdot 10^{18}$	$2,42 \cdot 10^6$

legge di azione di massa



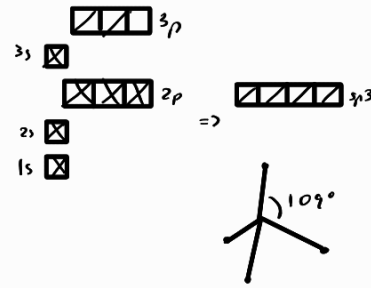
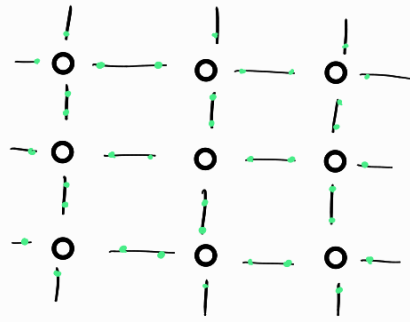
$\Rightarrow n \cdot p \propto e^{-\frac{E_g}{2kT}} \Rightarrow np = \sqrt{N_c N_v} e^{-\frac{E_g}{2kT}} = n_i^2$

$$n = N_c e^{-\frac{E_c - E_F}{kT}} = N_c \cdot \underbrace{e^{-\frac{E_c - E_i}{kT}}}_{n_i} \cdot e^{-\frac{E_i - E_F}{kT}} \Rightarrow n = n_i e^{-\frac{E_i - E_F}{kT}} \left(= \frac{n_i^2}{p} \right)$$

$$p = n_i e^{\frac{E_i - E_F}{kT}}$$

semiconduttore estrinseco

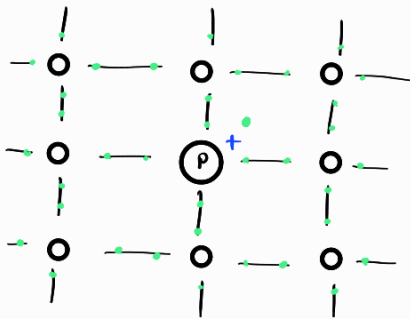
III	IV	V
B	C	N
Al	Si	P
Ga	Ge	As
In	Sn	Sb



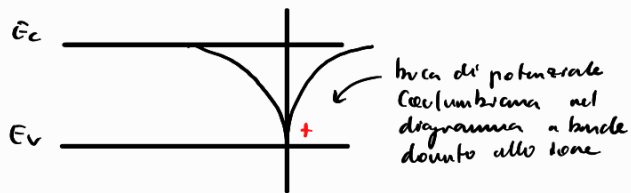
legandosi con gli altri atomi riempie la banda di valenza a OK

il legame è "debole" cioè $E_{fermica} > E_{legame}$ è suff. da vincere ionizzazione per $T > \phi_k$

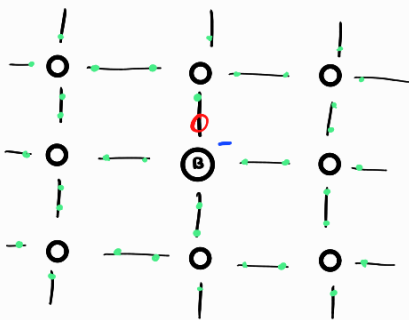
drogaggio con donori



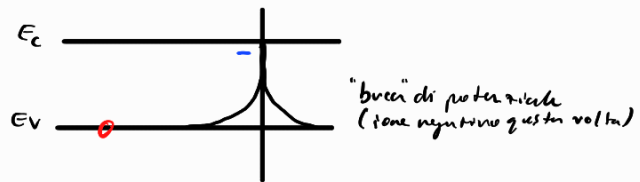
legame Coulombiano tra ione e elettrone debole
 \hookrightarrow l'elettrone popola la BC (è libero di condurre)



drogaggio con accettori



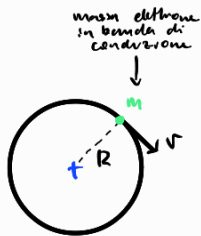
- legame tra lacuna e ione debole \Rightarrow lacuna "libera di muoversi" (un elettrone si muove nel buco della lacuna)
- l'elettrone lo prende dalla banda di valenza



• tuttavia questi sono discorsi qualitativi in quanto la ionizzaz. dei droganti non è sempre totale

• consideriamo la buca Coulombiana, con trattaz. semi-classica. Dove e troviamo i livelli?

elettrone che "orbita" attorno allo ione con orbita circolare



$$m a = m \frac{v^2}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q^2}{R^2}$$

(siamo nel semiconduttore)

$$\Rightarrow \begin{cases} m a = m \frac{v^2}{R} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon R^2} & \text{affermaz. classica} \\ \Delta p \cdot \Delta x = \hbar & \text{affermaz. quantistica} \\ \uparrow & \uparrow \\ \text{val. min. del momento} & \text{val. min. della posit.} \\ (p) & (R) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \frac{\hbar^2}{m^2 R} \cdot \frac{1}{R} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon R^2} \\ m v \cdot R = \hbar \Rightarrow v = \hbar / m \cdot R \end{cases} \Rightarrow R = \frac{4\pi\epsilon \hbar^2}{m q^2}$$

$\sqrt{\langle R^2 \rangle} = a_0$ raggio di Bohr (se facessi $\langle R \rangle$ troverei $\langle R \rangle = a/2$)

salta fuori dalla sol. dell'eq. di Schrödinger per l'atomo di idrogeno

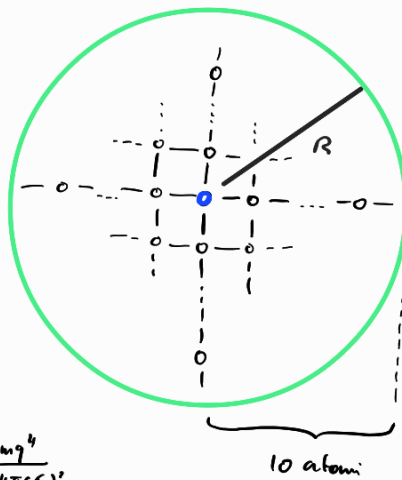
$$a_0 \sim 0,53 \text{ \AA}$$

tuttavia noi stiamo considerando non l'idrogeno bensì un semiconduttore (in part. il silicio)

$$\Rightarrow R = a_0 \cdot \frac{\epsilon_r}{m^*/m_0} \text{ fattori correttivi}$$

$$= 0,53 \text{ \AA} \cdot \frac{11,7}{0,26} = 2,4 \text{ nm}$$

cioè orbita ad almeno 10 atomi di silicio di distanza rispetto l'atomo attorno alla quale sta orbitando



$$E = \frac{R}{R} \cdot \frac{1}{2} m v^2 - \frac{q^2}{4\pi\epsilon R} = E_k + \bar{E}_{pot}$$

energia cin. energia pot.

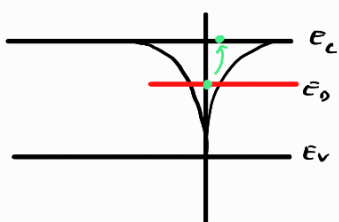
$$\Rightarrow E = \frac{R}{2} \cdot m \frac{v^2}{R} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon R} = \frac{R}{2} \cdot \frac{q^2}{4\pi\epsilon R^2} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon R} = \frac{-q^2}{8\pi\epsilon R} = \frac{-m q^4}{2(4\pi\epsilon \hbar)^2}$$

$$\left[m \frac{v^2}{R} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon R^2} \right] \qquad R = \frac{4\pi\epsilon \hbar^2}{m q^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{-m q^4}{2(4\pi\epsilon \hbar)^2} = -R_y \cdot \frac{m^*/m_0}{\epsilon_r^2} = -13,7 \cdot \frac{0,26}{11,7^2} = -26 \text{ meV (circa stima)}$$

fattori correttivi

Rydberg: energia dell'orbitale 1s fondamentale dell'atomo di idrogeno



energia legame: $E_c - E_0 = 26 \text{ meV} \sim$ ordini di grandezza Fermion © 2006

	$ E_0 - E_c \text{ [eV]}$
Li	0,033
P	0,045
As	0,054
B	0,045
Al	0,067
Ge	0,072
In	0,16

Si: P

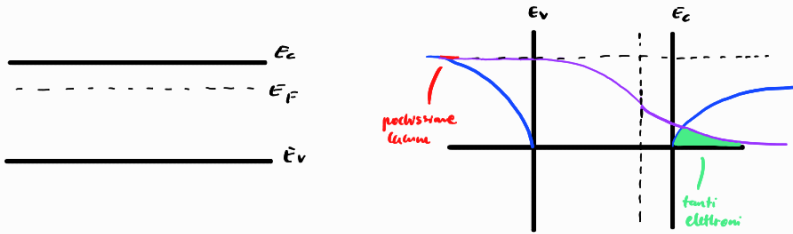
$N_D = 10^{18} \text{ m}^{-3}$ (sono pochissimi atomi di fosforo rispetto al silicio $10^{23} - 10^{24} \text{ cm}^{-3}$)

$\hookrightarrow n = N_D$ (tutti i dopanti sono ionizzati)

$$\rho = \frac{n_i^2}{N_D} \sim \frac{10^{20}}{10^{18}} = 10^2 \text{ cm}^{-3}$$

$$n = N_c e^{-\frac{E_c - E_F}{kT}} \Rightarrow E_F = E_c - kT \log \frac{N_c}{N_D} = E_c - 80 \text{ meV}$$

$\Rightarrow E_c - E_F = 80 \text{ meV} > 3kT \Rightarrow$ approx. Maxwell-Boltzmann OK



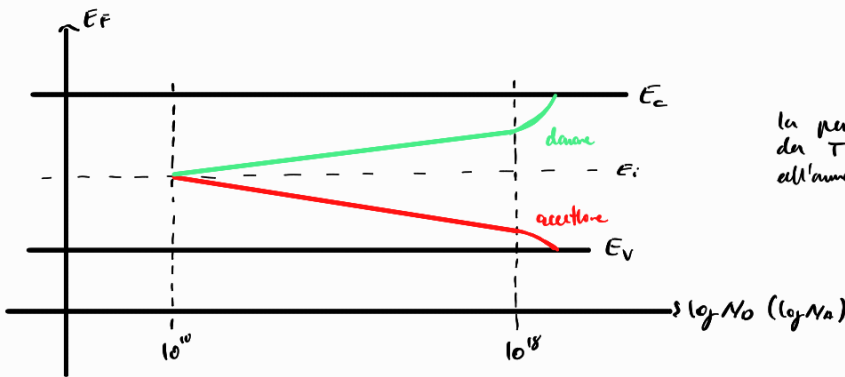
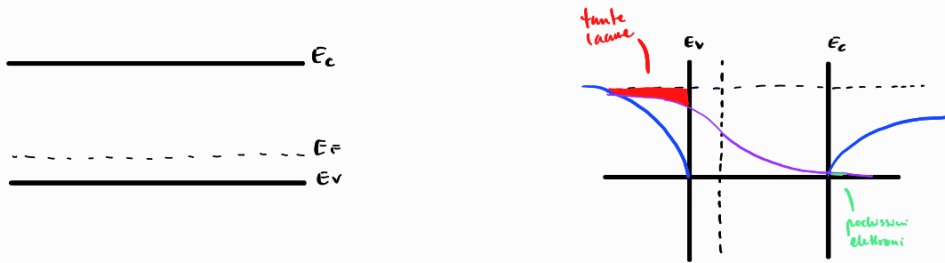
Si: B

$N_A = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$

$$\rho = 10^{17} \text{ cm}^{-3} = N_V e^{-\frac{E_V - E_F}{kT}}$$

$$n = \frac{n_i^2}{\rho} \sim 10^3 \text{ cm}^{-3}$$

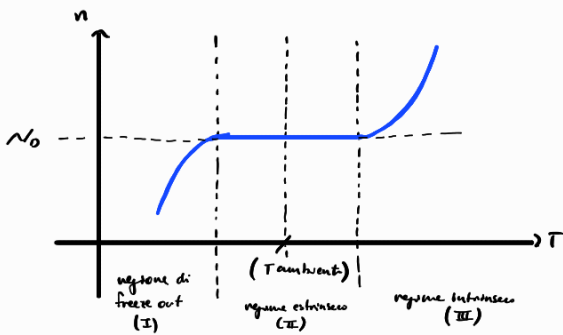
$$E_F = E_V + kT \log \frac{N_V}{N_A} = E_V + 10 \text{ meV}$$



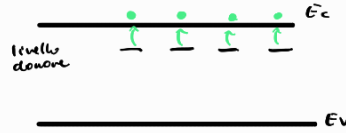
la posizione dipende da T (più riscalda all'aumentare di T)

da $\sim 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ in poi non ho più andamento lineare (non vale più l'approx. MB), e verso 10^{19} cm^{-3} approccio casi degenerati

per $N_D \sim 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ sto aggiungendo lo stesso n° di elettroni o meno di quanti ce ne sono già nel silicio intrinseco

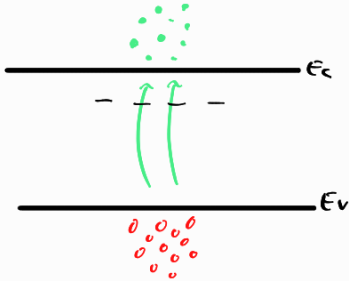


regione (II) (situa. "normale")



energia termica è suff. da ionizzare tutti i donori

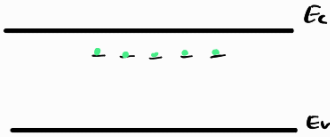
(III)



per T suff. grande prevale la concentr. di portatori dovuti alla generazione rispetto al drogaggio

$$n_i = \sqrt{N_c N_v} e^{-\frac{E_g}{2kT}} \gg n_0$$

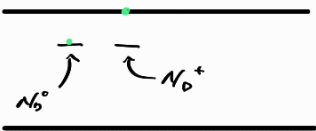
(I)



energia non suff. da liberare i portatori dai donori

regione I/II

(T relativamente basse)



$$N_0^0 + N_0^+ = N_0 \Rightarrow N_0^+ = N_0 - N_0^0$$

↑ neutro ↑ ionizzato

$$n = N_0^+ \text{ (neutralità carica)}$$

Hip. vale la statistica di Fermi-Dirac per il livello donore. È abbastanza plausibile, tuttavia con qualche accortezza, perché quando l'elettrone trova un donore vede due stati possibili energetici (↑↓). Però, la forza repulsiva Coulombiana non permette che ci legni un secondo elettrone (insomma non posso considerare il livello donore proprio come la banda di conduzione)

$$\Rightarrow \begin{cases} n = N_c e^{-\frac{E_c - E_F}{kT}} \\ N_0^+ = N_0 - N_0^0 = N_0 - N_0 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} e^{\frac{E_D - E_F}{kT}} + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = N_c e^{-\frac{E_c - E_F}{kT}} \\ N_0^+ = \frac{N_0 \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{E_D - E_F}{kT}}}{\frac{1}{2} e^{\frac{E_D - E_F}{kT}} + 1} = \frac{N_0}{1 + 2 e^{-\frac{E_D - E_F}{kT}}} \end{cases}$$

$$n = N_0^+ = \frac{N_0}{1 + 2 e^{-\frac{E_D - E_F}{kT}}} = \frac{N_0}{1 + 2 \frac{N_c}{N_0} e^{-\frac{E_D - E_F + E_c - E_c}{kT}}} = \frac{N_0}{1 + 2 \frac{N_c}{N_0} e^{-\frac{E_D - E_F}{kT}} e^{-\frac{E_c - E_F}{kT}}} \Rightarrow N_c' = \frac{1}{2} N_c e^{-\frac{E_c - E_D}{kT}} \text{ (simile a } N_c)$$

$$\Rightarrow n = \frac{N_0}{1 + \frac{n}{N_c'}} \Rightarrow n^2 + N_c' n - N_c' N_0 = 0 \Rightarrow n = -\frac{N_c'}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_c'}{2}\right)^2 + N_c' N_0}$$

(sgno - scartato, non ha senso fisicamente)

$$\Rightarrow n = \frac{N_c'}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{4n_0}{N_c'}} - 1 \right]$$

* per T alta, $N_c' \gg n_0 \Rightarrow n \sim \frac{N_c'}{2} \left(1 + 2 \frac{n_0}{N_c'} - 1 \right) = n_0$ (II) $\left[(1+f(x))^c - 1 \sim c \cdot f(x) \text{ per } x \rightarrow 0 \text{ relaz. asintotica} \right]$

$\hookrightarrow E_F = E_c - kT \log \frac{N_c}{n_0}$

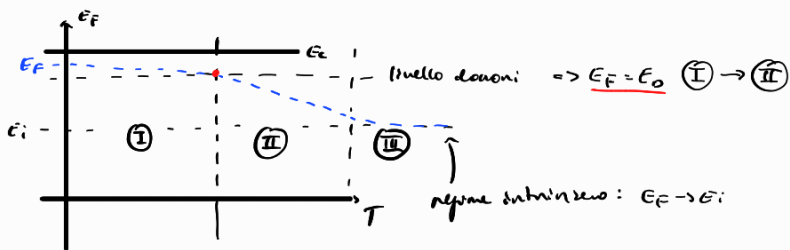
* per T bassa, $N_c' \ll n_0 \Rightarrow n \sim \sqrt{n_0 N_c'} = \sqrt{\frac{n_0 N_c}{2}} \cdot e^{-\frac{E_c - E_0}{2kT}}$ (I)
per $T \rightarrow \phi$

$\hookrightarrow E_F = E_c - kT \log \left[\frac{N_c}{\sqrt{\frac{n_0 N_c}{2}}} \cdot e^{-\frac{E_c - E_0}{2kT}} \right] = E_c - kT \log \left(\sqrt{\frac{2N_c}{n_0}} \right) - \frac{E_c - E_0}{2} \Rightarrow E_F = \frac{E_c + E_0}{2} - \frac{kT}{2} \log \left(\frac{2N_c}{n_0} \right)$

il livello di Fermi è tra il livello donatore e la banda di condiz.

* $n \sim n_0$ tutti i donatori ionizzati (II)

* $n \sim 0$ freeze out (I)



$$p = \frac{N_V'}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4N_0}{N_V}} - 1 \right)$$

$$N_V' = \frac{N_V}{4} \cdot e^{\frac{E_V - E_A}{kT}}$$

↑ dipendenza delle bande di valenza (bande leggere e pesanti) ⇒ ho un fattore 2

(III)

$$N_0^+ + p = N_A^- + n \quad (\text{neutralità di carica})$$

$\underbrace{N_0^+}_{N_0}$ $\underbrace{N_A^-}_{N_A}$
 dopanti completamente ionizzati (Hk. $T \gg T_{freezeout}$)

$$\Rightarrow N_0 + p = N_A + n \Rightarrow N_0 + \frac{n_i^2}{n} = N_A + n \Rightarrow n^2 - (N_0 - N_A)n - n_i^2 = 0$$

$$\Rightarrow n = \frac{N_0 - N_A}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_0 - N_A}{2}\right)^2 + n_i^2}$$

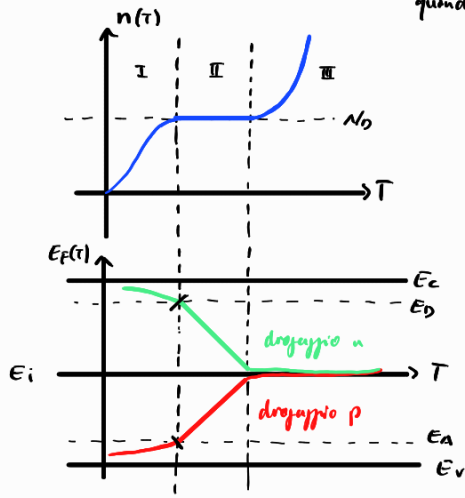
↳ contributo dovuto agli elettroni intrinseci, non più trascurabili per T suff. grandi

$$(n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{-\frac{E_G}{2kT}})$$

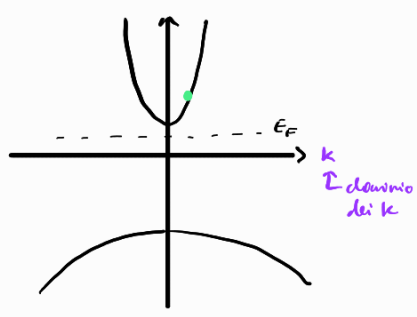
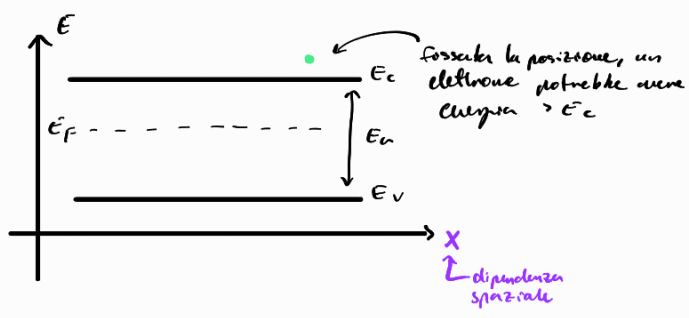
$$\propto \sqrt{(T)^{\frac{3}{2}} \cdot (T)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{E_G}{2kT}} \propto (T)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_G}{kT}}$$

↳ $n = p \sim n_i$

(nella regione (II) intrinseca, $N_0 - N_A \gg n_i$ quindi $n \sim N_0 - N_A$)



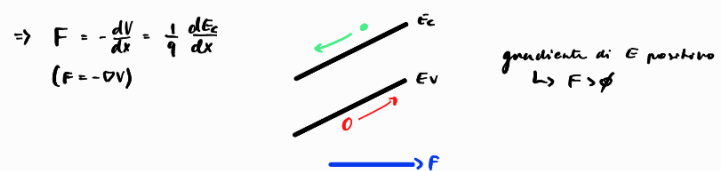
vediamo adesso la dipendenza spaziale:



$$E_{TOT} = E_C + \underbrace{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_n}}_{E_{pot.}} ; E_{TOT} = E_V - \underbrace{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_p}}_{E_{cin.}}$$

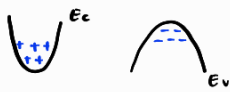
↳ quando applichiamo un campo, o introduciamo cariche fisse, modificiamo E_C, E_V (energia potenziale)

$$V = \text{potenziale (non energia potenziale)} = -\frac{1}{q} E_C$$

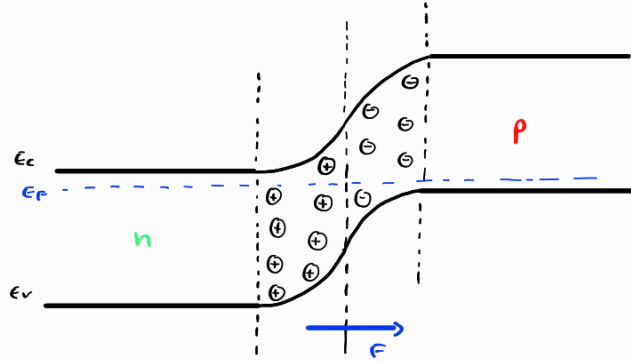


$$f = E \frac{dF}{dx} = E \frac{d^2 E_c}{dx^2}$$

$$(\nabla \cdot F = \rho / \epsilon)$$



la concavità indica la presenza di carica fissa $\neq 0$



$$J_{drift} = qn\mu_n F + qp\mu_p F \quad (\text{normalment prevale un contributo sull'altro})$$

$$\mu_n = \frac{q\tau_{cm}}{m_n^*} ; \mu_p = \frac{q\tau_{cm}}{m_p^*}$$

$$\tau_{cm} \sim 10^{-13} \text{ s} \quad (\text{tempo medio di rilassamento})$$

	m_n^*/m_0	μ_n [cm ² /V.s]	μ_p
Ge	0,12	3800	1900
Si	0,26	1360	460
GaAs	0,067	8000	1400

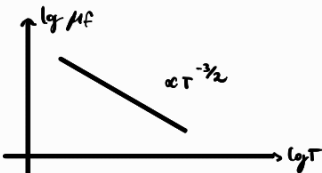
se cambia il drogaggio, e la temp., allora cambia la mobilità perché cambia τ_{cm}

scattering $\begin{cases} \text{fonone} \\ \text{impurezza ionizzate} \end{cases}$

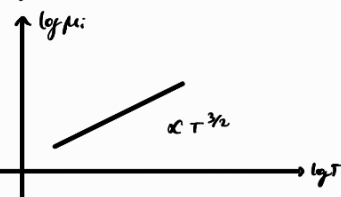
$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_f} + \frac{1}{\mu_i}$$

legge di Matthiessen

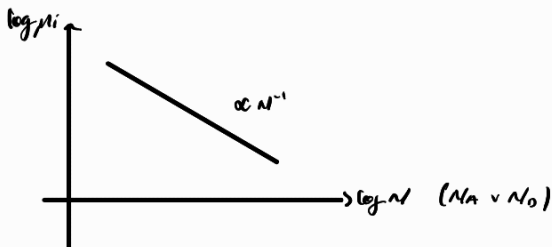
↑
limitata dai fononi: limitata dagli ioni:



aumenta T, ho più vibraz. \Rightarrow più fononi

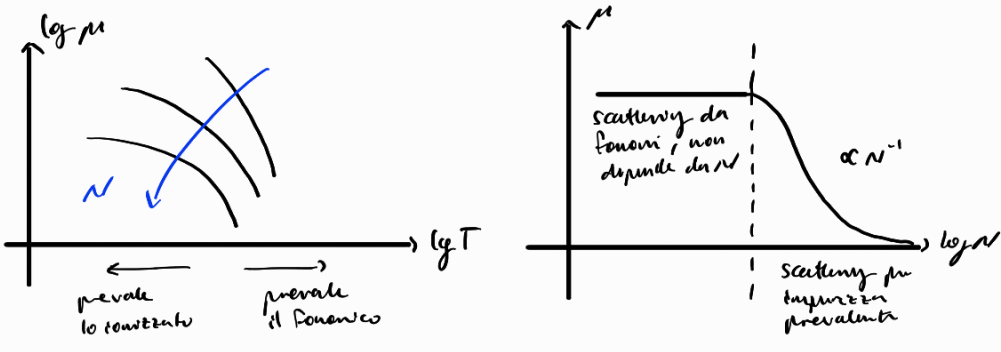


al crescere di T, l'elettrone si muoverà con velocità v_{th} sempre più veloce, "sfrecherà" davanti allo ione e ne uscirà sempre di meno

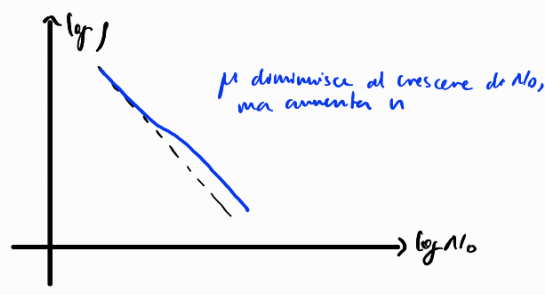


tutti questi effetti coesistono

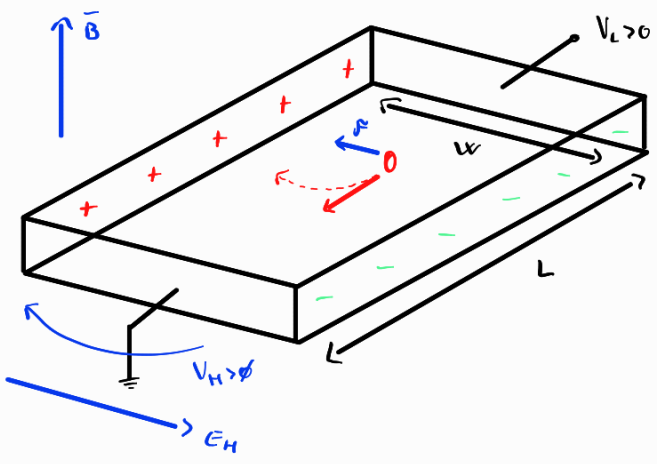
⇒



$\beta = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q n \mu_n}$ resistività



effetto Hall



$F_{Lorentz} = q \vec{v} \times \vec{B}$ (-q se considero un'elettrone)

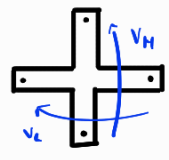
a regime raggiunge un equilibrio tra forza di Lorentz e forza elettrica del campo E_H
 ⇒ a regime la corrente va dritta

⇒ $q v B = q E_H$

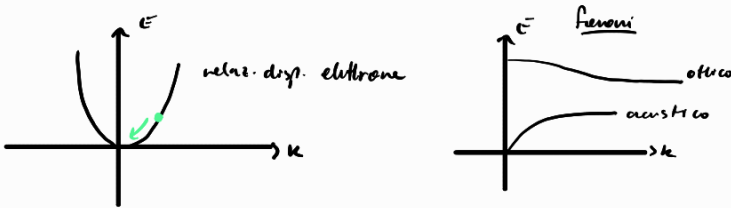
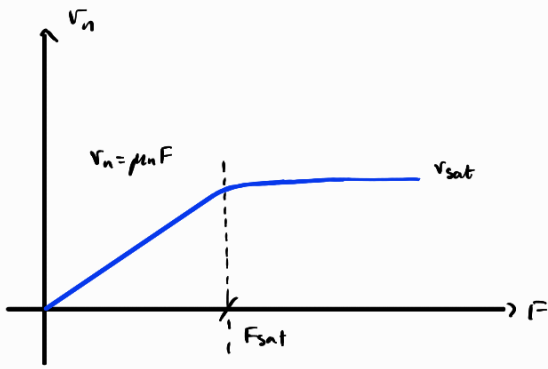
⇒ $q \mu_p \frac{V_L}{L} B = q \frac{V_H}{w}$

↳ $\mu_p = \frac{1}{B} \cdot \frac{V_H}{L} \cdot \frac{L}{w}$ fanno μ_p in funz. di quantità che conosco o posso misurare

$\vec{j} = q n \mu_p \vec{E} \Rightarrow \rho = \frac{1}{n \mu_p}$ posso anche misurare il drogaggio

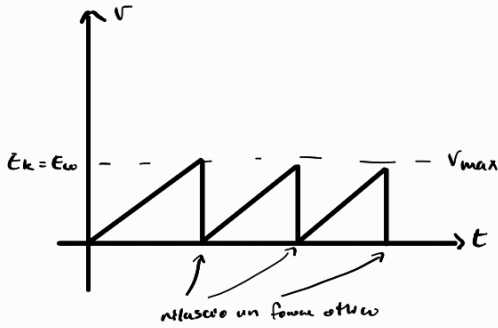


velocità di saturazione.



il fonone acustico mi fa rilassare la qt. di moto ma non mi fa perdere energia

per campi grandi, lo scattering per fononi ottici (cioè l'elettrone ha suff. energia per rilassarsi sotto forma di fononi ottici), quindi l'elettrone perde velocemente energia e saturo di conseguenza la sua velocità

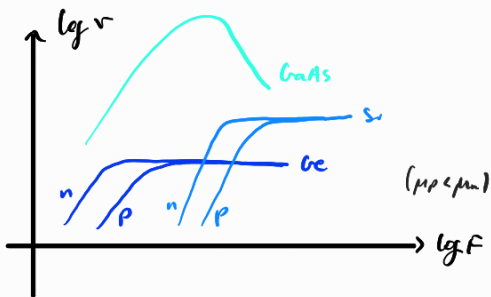


$$E = \hbar \omega_{LO} = 37 \text{ meV (Ge)} \text{ energia non trascurabile}$$

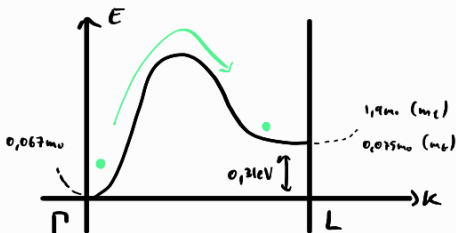
↑
longitudinale ottico (63 meV Si)

$$\frac{1}{2} m_n^* v_{max}^2 = \hbar \omega_{LO} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2 \hbar \omega_{LO}}{m_n^*}} \Rightarrow v_{sat} = \langle v \rangle = \frac{v_{max}}{2} \sim v_{th} \sim 10^7 \text{ cm/s @ T ambiente}$$

$$F_{sat} = \frac{v_{sat}}{\mu_n}$$

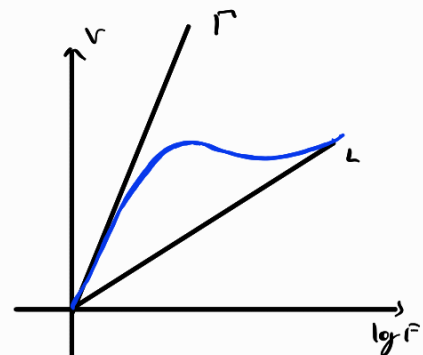


l'andamento del GaAs dovuto allo scattering intervalle

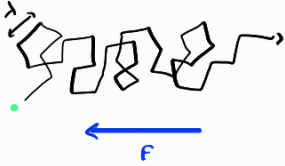


per campi F suff. grandi l'elettrone oltre rilassarsi in bande più popolate le altre valli => acquisiscono massa molto più grande

L_s crolla per



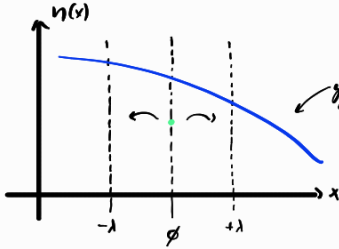
diffusione



$$\frac{1}{2} m v_{th}^2 = \frac{3}{2} kT \Rightarrow v_{th} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \sim 10^7 \text{ cm/s } (=v_{sat})$$

ogni τ_m subisce scattering

$$\Rightarrow \lambda = \text{mean free path} = v_{th} \cdot \tau_m \sim 10 \text{ nm}$$



gradiente di concentrat.

In un tempo τ_m $\frac{1}{2}$ vanno a dx e $\frac{1}{2}$ vanno a sx

$$\phi^+ = \frac{1}{2} n(-\frac{\lambda}{2}) \cdot v_{th} \quad (\text{flusso verso dx})$$

$$\phi^- = \frac{1}{2} n(+\frac{\lambda}{2}) \cdot v_{th} \quad (\text{flusso verso sx})$$

$$n(-\frac{\lambda}{2}) > n(+\frac{\lambda}{2}) \Rightarrow \phi^+ > \phi^- \quad \text{flusso netto verso dx}$$

(se $n = \text{cost.}$ non avrei flusso netto in nessuna direz.)

$$\Rightarrow \phi = -\frac{1}{2} v_{th} [n(+\frac{\lambda}{2}) - n(-\frac{\lambda}{2})] = \phi^+ - \phi^-$$

$$= -\frac{1}{2} v_{th} [n(x) + \frac{\partial n}{\partial x} \cdot \frac{\lambda}{2} - n(x) + \frac{\partial n}{\partial x} \cdot \frac{\lambda}{2}]$$

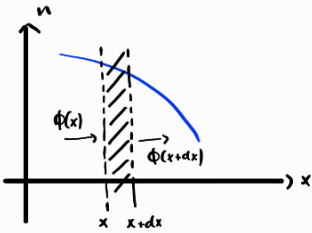
$$\Rightarrow \phi = -\frac{1}{2} v_{th} \cdot \lambda \cdot \frac{dn}{dx} \Rightarrow \phi = -D_n \nabla n \quad \text{I}^\circ \text{ legge di Fick}$$

diffusione nel verso opposto del gradiente di concentrat.

$$v_{th} = \frac{\lambda}{\tau_m} \quad \frac{1}{2} m v_{th}^2 = kT \text{ per semplicita'}$$

$$D_n = \frac{1}{2} v_{th} \lambda = \frac{1}{2} v_{th}^2 \tau_m = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\tau_m} = \frac{q^2 \tau_m}{m^*}$$

$$\Rightarrow D_n = \frac{kT}{q} \mu_n \quad \text{legge di Einstein}$$



$$\begin{aligned} -D_n \frac{\partial n}{\partial x} &= -D_n \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial n}{\partial t} \cdot dx \\ &= -D_n \frac{\partial n}{\partial x} - D_n \frac{d^2 n}{dx^2} \cdot dx + \frac{\partial n}{\partial t} \cdot dx \end{aligned} \quad \text{Conservaz. massa}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad \text{II}^\circ \text{ legge di Fick}$$

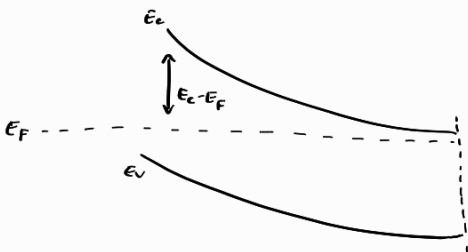
$$\Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = D_n \nabla^2 n$$

corrente di drift \rightarrow corrente di diffusione

$$J_n = q n \mu_n F + q D_n \frac{\partial n}{\partial x}$$

$$J_p = q p \mu_p F - q D_p \frac{\partial p}{\partial x}$$

supponiamo di avere il seguente andamento delle bande:



\rightarrow varca \Rightarrow ho un gradiente di concentrat. $n(x)$

$$n = N_c e^{-\frac{E_c - E_f}{kT}}$$

$$\Rightarrow E_c = E_f - kT \log \frac{n}{N_c}$$

$$\begin{cases} J_n = q n \mu_n F + q D_n \frac{dn}{dx} = \phi \quad (\text{stesso all'eq.}) \\ F = \frac{1}{q} \cdot \frac{dE_c}{dx} = -\frac{kT}{q} \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \end{cases}$$

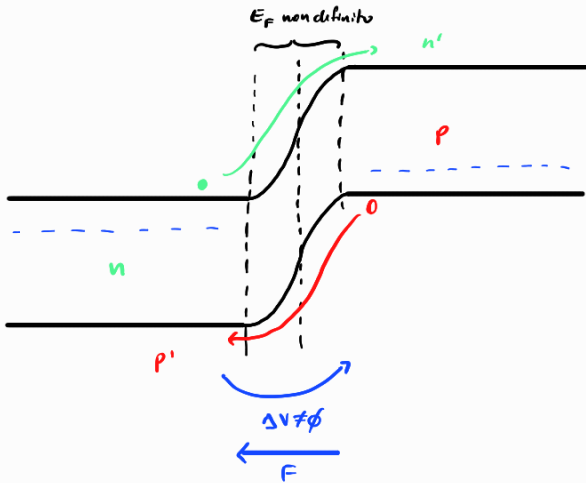
$$\Rightarrow J_n = -q \mu_n \frac{kT}{q} \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} + q D_n \frac{dn}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow D_n = \mu_n \frac{kT}{q} \quad \text{legge di Einstein wawawata in modo pi\u00f9 "rigoroso"}$$

livelli di quasi Fermi

all'equilibrio ho un unico livello di Fermi che mi determina n, p

fuori equilibrio:



eccesso dovuto all'iniezione

$$n = n_0 + n' = \frac{n_i^2}{p_0} + n'$$

$$p = p_0 + p' = \frac{n_i^2}{n_0} + p'$$

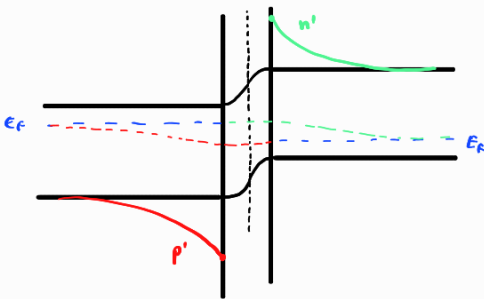
elettroni minoritari all'eq. in zona p

livelli di quasi-Fermi:

$$F_n \text{ t.c. } n = n_0 + n' = N_c e^{-\frac{E_c - F_n}{kT}}$$

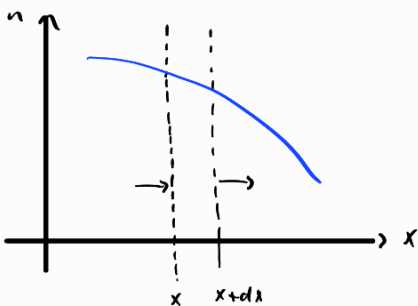
$$F_p \text{ t.c. } p = p_0 + p' = N_v e^{-\frac{E_v - F_p}{kT}}$$

(fuori equilibrio!)



$$\left(n = n_i e^{\frac{F_n - E_i}{kT}} ; p = n_i e^{-\frac{E_i - F_p}{kT}} \right)$$

continuità della corrente



$$\begin{aligned} \text{Flusso entranti} & \quad \text{Flusso uscenti} \\ \frac{\partial n}{\partial t} \cdot dx &= -\frac{J_n(x)}{q} + \frac{J_n(x+dx)}{q} \\ &= -\cancel{\frac{J_n(x)}{q}} + \cancel{\frac{J_n(x)}{q}} + \frac{1}{q} \frac{\partial J_n(x)}{\partial x} \cdot dx \\ \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{1}{q} \frac{\partial J_n}{\partial x} = \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial x} (q n \mu_n F + q D_n \frac{\partial n}{\partial x}) \end{aligned}$$

eq. di diffusione dei minoritari

- Hp. $\left\{ \begin{array}{l} * F \neq \phi \text{ (per esempio a ridosso della zona di svantaggio)} \\ * n, p \text{ uniformi (non c'è un profilo di drogaggio)} \\ * \text{debole iniezione } (n' \ll n_0 = p_0, p' \ll p_0 = n_0, \text{ cioè: minoritari rimangono minoritari}) \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (q n \mu_n F + q D_n \frac{\partial n}{\partial x}) = D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

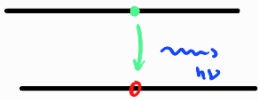
$F = \phi$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + g_n - r_n$$

$\swarrow \quad \searrow$
 rate di generaz.
 e ricombinaz.

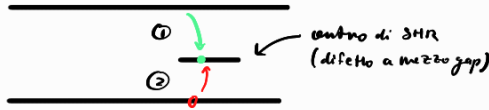
considero anche i contributi di g_n e r_n

ricombinanz. radiativa



(St diretto) $r_n = n \cdot p$
 ↑
 siamo nel silicio,
 St indiretto

ricombinanz. Shockley-Hall-Read



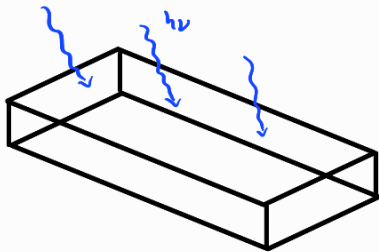
bottleneck al primo passaggio. Ho pochi elettroni minoritari,
 e tanta luce maggioritaria $\Rightarrow r_n = \frac{n'}{\tau_n}$
 τ_n tempo di recomb. elettroni minoritari

$$\frac{\partial (n_0 + n')}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 (n_0 + n')}{\partial x^2} + g_n - \frac{n'}{\tau_n} \quad \text{no cost. (per } \tau_p)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial n'}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 n'}{\partial x^2} + g_n - \frac{n'}{\tau_n}$$

$$\text{e analogamente } \frac{\partial p'}{\partial t} = D_p \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + g_p - \frac{p'}{\tau_p}$$

(n', p' minoritari)



$h\nu$ uniforme, g_n uniforme

$$\Rightarrow \frac{\partial n'}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 n'}{\partial x^2} + g_n - \frac{n'}{\tau_n} \Rightarrow n' = g_n \tau_n$$

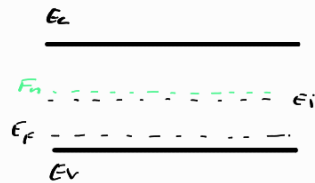
$n' = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$
 $(p' = 10^{15} \text{ cm}^{-3})$

$$g_n \sim 10^{20} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$$

$$\tau_n \sim 10^{-5} \text{ s}$$

$$n' p' \ll N_A, N_D \quad \text{ok}$$

$$n' p' \text{ irrilevanti rispetto } N_A, N_D \Rightarrow p \sim p_0, n \sim n_0 \Rightarrow E_F \sim E_n, E_p$$



Spegniamo la luce:

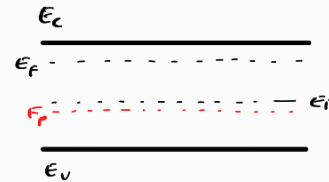
$$\frac{\partial n'}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 n'}{\partial x^2} + g_n - \frac{n'}{\tau_n} \Rightarrow \frac{\partial n'}{\partial t} + \frac{1}{\tau_n} n' = 0$$

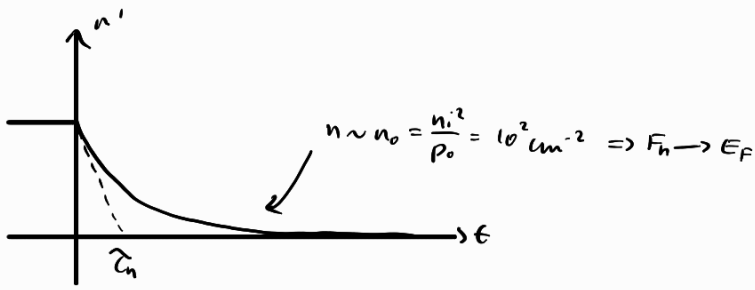
$\phi \neq$
 (ho un transiente)
 τ_n τ_p

$$\Rightarrow \lambda + \frac{1}{\tau_n} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{\tau_n} \Rightarrow n'(t) = A \cdot e^{-\frac{1}{\tau_n} t}$$

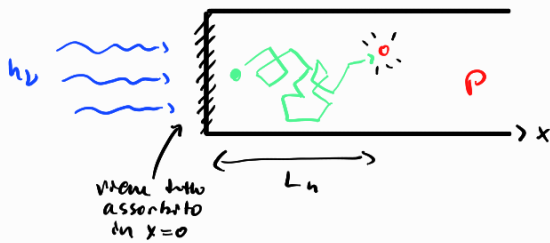
$$A = n'(0) = g_n \tau_n$$

$$\Rightarrow n'(t) = n'(0) e^{-\frac{1}{\tau_n} t}$$





caso di semi-forme



condit. a regime $\frac{\partial n'}{\partial t} = D_n \frac{\partial^2 n'}{\partial x^2} + g_n - \frac{n'}{\tau_n} \Rightarrow D_n \frac{\partial^2 n'}{\partial x^2} - \frac{1}{\tau_n} \cdot n' = 0$

ho gen. solo in $x=0$

$D_n \lambda^2 - \frac{1}{\tau_n} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{D_n \tau_n} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{L_n}$

↳ lunghezza di diffusione: è una sorta di misura della distanza media percorsa da un elettrone prima di ricombinare

$\Rightarrow n'(x) = A e^{\frac{x}{L_n}} + B e^{-\frac{x}{L_n}}$ $B = n'(0)$

$A=0$: condit. al contorno che $n'(\infty) = 0$

$\Rightarrow n'(x) = n'(0) e^{-\frac{x}{L_n}}$

